

Introduction à la dynamique

Partie 2

LICENCE 1

Vincent Démery

2025–2026

Version du 24 février 2026

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence [Creative Commons “CC0 1.0 Universel”](#).



Table des matières

Table des matières	6
1 Rappels	7
1.1 Description du mouvement	7
1.2 Deuxième loi de Newton	8
1.3 Énergies	8
1.3.1 Énergie cinétique	8
1.3.2 Énergie potentielle	9
1.3.3 Énergie mécanique	10
1.4 Quantités conservées	11
1.4.1 Quantité de mouvement	11
1.4.2 Moment cinétique	11
2 Oscillations	13
2.1 Système masse-ressort	13
2.1.1 Équation du mouvement	13
2.1.2 Résolution	14
2.1.3 Approche énergétique	16
2.2 Oscillateur harmonique amorti	17
2.2.1 Équation du mouvement	17
2.2.2 Résolution	18
2.2.3 Approche énergétique	21
2.3 Pendule pesant	22
2.3.1 Équation du mouvement	22
2.3.2 Limite de faible amplitude	25
2.3.3 Comportement à grande amplitude	26
3 Mouvements à force centrale	27
3.1 Introduction et propriétés	27
3.1.1 Définition, conservation du moment cinétique	27
3.1.2 Exemples	27

3.1.3	Lois de Kepler	28
3.2	Résolution	28
3.2.1	Trajectoires circulaires	28
3.2.2	Formules de Binet	29
3.2.3	Principe Fondamental de la Dynamique	30
3.3	Propriétés des trajectoires	31
3.3.1	Géométrie	31
3.3.2	Troisième loi de Kepler	32
3.3.3	Exemples	32
3.4	Énergies	34
3.4.1	Définition des énergies	34
3.4.2	Discussion qualitative des comportements	35
3.4.3	Énergie mécanique pour une trajectoire	36
4	Systèmes de points matériels	37
4.1	Centre de masse	37
4.1.1	Définition	37
4.1.2	Dynamique du centre de masse	39
4.2	Collisions	40
4.2.1	Définitions et lois générales	40
4.2.2	Impact sur un objet immobile	41
4.3	Composition des mouvements	42
4.3.1	Référentiel en translation uniforme	42
4.3.2	Référentiel en rotation uniforme	44

Chapitre 1

Rappels

1.1 Description du mouvement

On considère le mouvement d'un objet de masse m et situé au point M . Si on dispose d'un référentiel d'origine O et de trois axes, on peut considérer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$, que l'on notera plus simplement $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. Nous utiliserons le plus souvent les coordonnées cartésiennes, pour lesquelles nous noterons les composantes du vecteur position $\vec{r} = (x, y, z)$, ou, en colonne,

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

On peut aussi utiliser les coordonnées polaires (en deux dimensions), cylindriques, ou sphériques. Dans tous les cas, deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales. Si l'objet considéré est en mouvement, sa position et ses coordonnées dépendent du temps t ; on écrira

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

À partir d'une position dépendante du temps, on définit la *vitesse* $\vec{v}(t)$ et l'*accélération* $\vec{a}(t)$ de l'objet par des dérivées successives :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t), \quad (1.3)$$

et

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}. \quad (1.4)$$

Il s'agit ici de la dérivée de *vecteurs* par rapport à une variable *scalaire*. Le résultat est un vecteur dont les composantes sont les dérivées des composantes du vecteur de départ :

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{dz(t)}{dt} \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

et

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d^2x(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2y(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2z(t)}{dt^2} \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

Exemple 1.1. Considérons le mouvement d'équation

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_{0x}t \\ 0 \\ v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

La vitesse et l'accélération sont obtenues en dérivant successivement chaque composante :

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ 0 \\ v_{0z} - gt \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

1.2 Deuxième loi de Newton

La deuxième loi de Newton, ou *Principe Fondamental de la Dynamique* (PFD), indique comment le mouvement d'un objet est affecté par les forces qui s'appliquent sur cet objet. Ces forces sont décrites par des vecteurs et peuvent dépendre du temps ou de la position de l'objet. Leur effet est additif : il est équivalent de dire qu'un objet est soumis aux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ et qu'il est soumis à la force $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Nous noterons donc simplement $\vec{F}$ la force totale à laquelle est soumise un objet.

D'après la deuxième loi de Newton, l'accélération d'un objet dans un référentiel galiléen est donnée par la force qu'il ressent, via sa masse m :

$$m\vec{a}(t) = \vec{F}(t). \quad (1.10)$$

En particulier, un objet qui n'est soumis à aucune force, c'est à dire $\vec{F}(t) = 0$, a une accélération nulle et donc, par intégration, une vitesse constante.

$$\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t)dt = 0. \quad (1.11)$$

Exemple : reprenons l'exemple du mouvement décrit par l'équation (1.7), donc l'accélération est donnée par l'équation (1.9) : $\vec{a}(t) = (0, 0, -g) = -g\vec{k} = \vec{g}$. Cela signifie que l'objet est soumis à une force $\vec{F} = m\vec{g}$: on reconnaît l'accélération gravitationnelle.

Exemple 1.2. Reprenons l'exemple 1.1. L'accélération est donnée par l'équation (1.9) : $\vec{a}(t) = (0, 0, -g) = -g\vec{k} = \vec{g}$. Cela signifie que l'objet est soumis à une force $\vec{F} = m\vec{g}$: on reconnaît l'accélération gravitationnelle.

1.3 Énergies

1.3.1 Énergie cinétique

On définit l'énergie cinétique par

$$E_c(t) = \frac{1}{2}mv(t)^2, \quad (1.12)$$

où

$$v(t)^2 = \vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t) = \|\vec{v}(t)\|^2. \quad (1.13)$$

Pour calculer la dérivée temporelle, il faut calculer la dérivée d'un produit scalaire :

$$\frac{d[v(t)^2]}{dt} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \cdot \vec{v}(t) + \vec{v}(t) \cdot \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = 2 \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \cdot \vec{v}(t) = 2\vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t). \quad (1.14)$$

Pour l'énergie cinétique, on a donc

$$\frac{dE_c(t)}{dt} = m\vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t). \quad (1.15)$$

En utilisant la deuxième loi de Newton (Eq. (1.10)), on obtient

$$\frac{dE_c(t)}{dt} = \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t) = P_{\vec{F}}(t), \quad (1.16)$$

où le dernier terme est la *puissance* des forces extérieures. Cette relation est le *théorème de l'énergie cinétique* ; c'est en fait une reformulation de la deuxième loi de Newton. Intégré entre deux temps t_1 et t_2 , on obtient

$$E_c(t_2) - E_c(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t) dt = \int_{\vec{r}(t_1)}^{\vec{r}(t_2)} \vec{F}(t) \cdot d\vec{r}(t) = \int_{\vec{r}(t_1)}^{\vec{r}(t_2)} dW_{\vec{F}}(t) = W_{\vec{F}}, \quad (1.17)$$

où $W_{\vec{F}}$ est le *travail* des forces extérieures.

Exemple 1.3. Reprenons l'exemple 1.1 et calculons l'énergie cinétique à partir de la vitesse $\vec{v}(t) = (v_{0x}, 0, v_{0z} - gt)$ (equation (1.5)). On obtient

$$E_c(t) = \frac{m}{2} [v_{0x}^2 + (v_{0z} - gt)^2] ; \quad (1.18)$$

l'énergie cinétique décroît et atteint son minimum pour $t = v_{0z}/g$ puis augmente. La dérivée de l'énergie cinétique est

$$\frac{dE_c(t)}{dt} = mg(gt - v_{0z}). \quad (1.19)$$

Calculons la puissance de la force extérieure identifiée précédemment, $\vec{F} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$:

$$P_{\vec{F}}(t) = \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{0x} \\ 0 \\ v_{0z} - gt \end{pmatrix} = mg(gt - v_{0z}). \quad (1.20)$$

Comme attendu, on retrouve la dérivée de l'énergie cinétique.

1.3.2 Énergie potentielle

On distingue les *forces conservatives*, qui dérivent d'une énergie potentielle. Pour les définir, on commence par se donner une énergie potentielle, qui est une fonction de la position : $E_p(\vec{r}) = E(x, y, z)$. Ici, $\vec{r} = (x, y, z)$ peut être n'importe quel point de l'espace, pas nécessairement la position de l'objet considéré. On dit parfois que l'énergie potentielle définit un "paysage" énergétique. On peut définir le *gradient* de l'énergie potentielle, qui est le vecteur donné par

$$\overrightarrow{\text{grad}} E_p(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_p(x, y, z)}{\partial x} \\ \frac{\partial E_p(x, y, z)}{\partial y} \\ \frac{\partial E_p(x, y, z)}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

On dit qu'un *champ de force* $\vec{F}(\vec{r})$, qui associe un vecteur force à tout point de l'espace, dérive de l'énergie potentielle $E_p(\vec{r})$ si

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p(\vec{r}). \quad (1.22)$$

Une force, ou un champ de force, qui dérive d'une énergie potentielle est dite *conservative*. Si on se donne une énergie potentielle, on peut toujours en déduire une force conservative. Si on se donne une force, il n'est pas toujours possible de trouver l'énergie potentielle correspondante; par exemple, les forces de frottement visqueuses, de la forme $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$, ne dérivent pas d'une énergie potentielle.

Exemple 1.4. Dans l'exemple 1.1, la force gravitationnelle $\vec{F} = -mg\vec{k}$ dérive de l'énergie potentielle de pesanteur $E_p(x, y, z) = mgz$.

La puissance d'une force conservative $\vec{F}_c$ peut s'exprimer avec l'énergie potentielle :

$$P_{\vec{F}_c}(t) = \vec{F}_c(t) \cdot \vec{v}(t) \quad (1.23)$$

$$= -\left[\overrightarrow{\text{grad}} E_p(\vec{r}(t))\right] \cdot \vec{v}(t) \quad (1.24)$$

$$= -\frac{\partial E_p}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} - \frac{\partial E_p}{\partial y} \frac{dy(t)}{dt} - \frac{\partial E_p}{\partial z} \frac{dz(t)}{dt} \quad (1.25)$$

$$= -\frac{dE_p(\vec{r}(t))}{dt} \quad (1.26)$$

où nous avons noté E_p au lieu de $E_p(x(t), y(t), z(t))$ par souci de concision. La dernière égalité s'obtient par la règle de la chaîne, qui s'écrit pour une fonction d'une variable :

$$\frac{df(x(t))}{dt} = f'(x(t)) \frac{dx(t)}{dt}; \quad (1.27)$$

et, pour une fonction de deux variables,

$$\frac{df(x(t), y(t))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \frac{dy(t)}{dt}. \quad (1.28)$$

1.3.3 Énergie mécanique

Reprenons le théorème de l'énergie cinétique quand l'objet est soumis à une force conservative $\vec{F}_c$ qui dérive de l'énergie potentielle E_p :

$$\frac{dE_c(t)}{dt} = P_{\vec{F}_c}(t) = -\frac{dE_p(t)}{dt}. \quad (1.29)$$

En faisant passer l'énergie potentielle à gauche, on peut écrire

$$\frac{d}{dt} [E_c(t) + E_p(t)] = 0. \quad (1.30)$$

La somme des énergies cinétique et potentielle est constante, c'est l'énergie mécanique :

$$E_m = E_c + E_p. \quad (1.31)$$

Exemple 1.5. Dans l'exemple, l'énergie mécanique est donc

$$E_m(t) = E_c(t) + E_p(t) = \frac{m}{2} [v_{0x}^2 + (v_{0z} - gt)^2] + mg \left(v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2 \right) \quad (1.32)$$

$$= \frac{mv_{0x}^2}{2} + m \left(\frac{1}{2}v_{0z}^2 - v_{0z}gt + \frac{1}{2}g^2t^2 \right) + mg \left(v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2 \right) \quad (1.33)$$

$$= \frac{m}{2} (v_{0x}^2 + v_{0z}^2). \quad (1.34)$$

L'énergie mécanique est donc constante et, en particulier, égale à l'énergie mécanique à $t = 0$ qui est obtenue dans la dernière expression.

En présence d'une force non-conservative $\vec{F}_{nc}(t)$, on peut décomposer la force comme $\vec{F}(t) = \vec{F}_c(t) + \vec{F}_{nc}(t)$. La puissance est additive, donc $P_{\vec{F}}(t) = P_{\vec{F}_c}(t) + P_{\vec{F}_{nc}}(t)$ et la variation de l'énergie cinétique s'écrit

$$\frac{dE_c(t)}{dt} = P_{\vec{F}_c}(t) + P_{\vec{F}_{nc}}(t) = -\frac{dE_p(t)}{dt} + P_{\vec{F}_{nc}}(t). \quad (1.35)$$

Ainsi, la variation d'énergie mécanique est donnée seulement par la puissance de la force non-conservative :

$$\frac{dE_m(t)}{dt} = P_{\vec{F}_{nc}}(t). \quad (1.36)$$

1.4 Quantités conservées

Nous avons vu au chapitre précédent que l'énergie mécanique d'un objet soumis à une force conservative était conservée. Les quantités conservées aident parfois à résoudre des problèmes en mécanique et en physique en général. Nous introduisons ici deux quantités vectorielles qui peuvent être conservées.

1.4.1 Quantité de mouvement

La première est la *quantité de mouvement* $\vec{p}$, définie par

$$\vec{p}(t) = m\vec{v}(t). \quad (1.37)$$

D'après la seconde loi de Newton, l'évolution de la quantité de mouvement est donnée par

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \vec{F}(t). \quad (1.38)$$

La quantité de mouvement est conservée si la force est nulle. S'agissant d'une égalité vectorielle, elle fournit une égalité par composante, et une composante de la quantité de mouvement est conservée si cette composante de la force est nulle.

Exemple 1.6. Dans l'exemple, la force est $\vec{F} = (0, 0, -mg)$, donc $F_x = 0$, et en conséquence $p_x = mv_x$ est conservée.

1.4.2 Moment cinétique

La deuxième quantité vectorielle que nous allons considérer est le *moment cinétique* $\vec{L}$:

$$\vec{L}(t) = \vec{r}(t) \wedge m\vec{v}(t); \quad (1.39)$$

cette définition utilise le produit vectoriel. Contrairement à la quantité de mouvement, elle fait intervenir l'origine du repère O via la position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. En composantes,

$$\vec{L}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge m \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} yv_z - zv_y \\ zv_x - xv_z \\ xv_y - yv_x \end{pmatrix}. \quad (1.40)$$

On voit d'après cette expression que le produit vectoriel est antisymétrique, c'est à dire que, pour deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ quelconques, $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$; en particulier, $\vec{a} \wedge \vec{a} = 0$. Le moment cinétique est parfois projeté selon un axe; par exemple, si le mouvement a lieu dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$, seule la composante selon z , c'est à dire perpendiculaire à ce plan, est non nulle.

Pour calculer l'évolution du moment cinétique, il faut dériver un produit; le produit vectoriel se dérive comme tout produit :

$$\frac{d\vec{L}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{r}(t) \wedge m\vec{v}(t)] \quad (1.41)$$

$$= m \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \wedge \vec{v}(t) + \vec{r}(t) \wedge m \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \quad (1.42)$$

$$= m\vec{v}(t) \wedge \vec{v}(t) + \vec{r}(t) \wedge m\vec{a}(t) \quad (1.43)$$

$$= \vec{r}(t) \wedge \vec{F}(t). \quad (1.44)$$

Pour passer de l'équation (1.43) à la suivante, on a utilisé l'antisymétrie du produit vectoriel.

La condition de conservation du moment cinétique apparaît dans l'équation (1.44) : il faut que la force $\vec{F}$ à laquelle est soumis l'objet soit alignée avec sa position $\vec{r}$. Une force alignée avec la position est une *force centrale*.

Par exemple, dans le référentiel terrestre, l'*attraction gravitationnelle* est une force centrale :

$$\vec{F}_g = -GMm \frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{GMm}{r^2} \vec{u}_r, \quad (1.45)$$

où G est la constante gravitationnelle, M est la masse de la Terre, m la masse de l'objet, $r = \|\vec{r}\|$ est la distance au centre de la terre, et $\vec{u}_r = \vec{r}/r$ est le vecteur unitaire (de norme 1) qui "pointe" dans la direction de l'objet. Nous verrons dans le chapitre 3 que la conservation du moment cinétique simplifie beaucoup l'étude des orbites autour du Soleil ou de la Terre.

Chapitre 2

Oscillations

Dans ce chapitre, nous allons utiliser les outils rappelés au chapitre précédent pour décrire des mouvements oscillatoires. Notre étude se basera sur deux systèmes physiques : un système masse-ressort, dans lequel un objet est connecté à un point fixe via un ressort, et un pendule pesant. Dans les deux cas, nous commencerons par établir les équations du mouvement à l'aide du principe fondamental de la dynamique ou d'une de ses variantes, puis nous résoudrons ces équations pour aboutir à une description complète du mouvement. Nous étudierons aussi l'évolution des énergies cinétique, potentielle et mécanique au cours du mouvement et verrons qu'elles permettent de comprendre la nature du mouvement même quand on ne sait pas résoudre explicitement les équations du mouvement.

2.1 Système masse-ressort

2.1.1 Équation du mouvement

On considère un objet de masse m suspendu à un point fixe via un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . La force exercée par le ressort est d'amplitude $K(\ell - \ell_0)$, où ℓ est la longueur du ressort étiré ou comprimé, et elle s'exerce dans la direction du ressort. Si l'objet est aligné avec le point d'attache et est à la hauteur $z = 0$ quand le ressort a sa longueur à vide (ou longueur de repos), alors la force du ressort est donnée par

$$\vec{F}_{\text{ressort}} = -Kz\vec{k}. \quad (2.1)$$

L'objet est aussi soumis à la gravité ; la force est

$$\vec{F}_{\text{grav}} = -mg\vec{k}. \quad (2.2)$$

Nous supposons que le mouvement a lieu selon la verticale. Cette hypothèse n'est pas vérifiée si la position initiale de l'objet est décalée par rapport au point d'attache ou si sa vitesse initiale a une composante horizontale. Avec cette hypothèse, la position de l'objet est donnée par $\vec{r}(t) = (0, 0, z(t)) = z(t)\vec{k}$, sa vitesse et son accélération sont données par

$$\vec{v}(t) = \dot{z}(t)\vec{k}, \quad (2.3)$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{z}(t)\vec{k}. \quad (2.4)$$

Le Principe Fondamental de la Dynamique, $m\vec{a}(t) = \vec{F}(t)$ selon la verticale donne donc

$$m\ddot{z}(t) = -mg - Kz(t). \quad (2.5)$$

Quand $-mg - Kz = 0$, la force du ressort compense celle de la gravité et le système est à l'équilibre ; cela arrive quand la masse est à la hauteur

$$z_{\text{eq}} = -\frac{mg}{K}. \quad (2.6)$$

Il est plus pratique d'utiliser la position d'équilibre comme point de référence ; pour cela, on introduit la nouvelle variable

$$u(t) = z(t) - z_{\text{eq}} = z(t) + \frac{mg}{K}. \quad (2.7)$$

En dérivant deux fois cette expression, on trouve que

$$\ddot{u}(t) = \ddot{z}(t). \quad (2.8)$$

On peut maintenant utiliser $x(t)$ dans le PFD (équation (2.5)) :

$$m\ddot{u}(t) = m\ddot{z}(t) = -K \left[z(t) - \frac{mg}{K} \right] = -Ku(t). \quad (2.9)$$

En introduisant la pulsation caractéristique

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}, \quad (2.10)$$

on peut écrire l'équation finale est donc

$$\ddot{u}(t) = -\omega_0^2 u(t). \quad (2.11)$$

Cette équation est l'équation de l'*oscillateur harmonique*.

Remarque 2.1. Nous pouvons vérifier que ω_0 définie dans l'équation (2.10) est bien une pulsation, c'est à dire l'inverse d'un temps. On note F les forces, L les longueurs et T les temps ; ils s'expriment respectivement en Newtons, mètres, et secondes. D'après l'expression (2.1), la dimension de la raideur K est $[K] = F/L$. D'après l'expression (2.2), comme g est une accélération, $[g] = L/T^2$ et $[m] = F/[g] = FT^2/L$. Donc, la dimension du ration K/m est $[K/m] = 1/T^2$, donc $[\omega_0] = 1/T$.

2.1.2 Résolution

Nous cherchons maintenant à résoudre l'équation de l'oscillateur harmonique (2.11). Du point de vue mathématique, c'est une équation différentielle ordinaire d'ordre 2 (car elle contient une dérivée seconde) à coefficients constant (seule la fonction inconnue $u(t)$ dépend du temps).

La solution générale à l'équation (2.11) est

$$u(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t). \quad (2.12)$$

Les coefficients A et B peuvent changer d'une solution à l'autre et dépendent des conditions initiales. Pour montrer que cette solution convient, il faut utiliser que $\cos'(x) = -\sin(x)$ et $\sin'(x) = \cos(x)$. On peut alors calculer

$$\dot{u}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t), \quad (2.13)$$

et

$$\ddot{u}(t) = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) - B\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) = -\omega_0^2 u(t). \quad (2.14)$$

La solution générale (2.12) est une solution oscillante à la *pulsation* ω_0 . On définit aussi sa *période* $T = 2\pi/\omega_0$, c'est à dire, par exemple, le temps entre deux maxima de la fonction. Par définition, la

période est le plus petit temps τ tel que $u(t+\tau) = u(t)$ pour tout temps t . On définit aussi sa *fréquence* $\nu = 1/T = \omega_0/(2\pi)$. Pour déterminer l'*amplitude* de la solution, c'est à dire la hauteur du maximum, il faut d'abord localiser le maximum t^* , qui est un point où la dérivée s'annule :

$$\dot{u}(t^*) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t^*) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t^*), \quad (2.15)$$

ce qui impose

$$A \sin(\omega_0 t^*) = B \cos(\omega_0 t^*). \quad (2.16)$$

Calculons maintenant le carré du maximum (ou du minimum) :

$$u(t^*)^2 = A^2 \cos(\omega_0 t^*)^2 + B^2 \sin(\omega_0 t^*)^2 + 2AB \cos(\omega_0 t^*) \sin(\omega_0 t^*). \quad (2.17)$$

En utilisant la relation (2.16) valable au maximum, on peut réécrire le dernier terme comme

$$2AB \cos(\omega_0 t^*) \sin(\omega_0 t^*) = AB \cos(\omega_0 t^*) \sin(\omega_0 t^*) + AB \cos(\omega_0 t^*) \sin(\omega_0 t^*) \quad (2.18)$$

$$= A^2 \sin(\omega_0 t^*)^2 + B^2 \cos(\omega_0 t^*)^2. \quad (2.19)$$

En injectant dans le carré du maximum, on obtient

$$u(t^*)^2 = (A^2 + B^2) [\cos(\omega_0 t^*)^2 + \sin(\omega_0 t^*)^2] = A^2 + B^2, \quad (2.20)$$

l'amplitude de la solution est donc $\sqrt{A^2 + B^2}$.

Une méthode plus systématique pour arriver à la solution (2.12) et que nous utiliserons plus tard est de chercher la solution à l'équation (2.11) sous la forme d'une exponentielle, $u(t) = e^{at}$. La dérivée seconde vaut

$$\frac{d^2 e^{at}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left[\frac{de^{at}}{dt} \right] = \frac{d}{dt} [ae^{at}] = a^2 e^{at}. \quad (2.21)$$

En injectant cette expression dans l'équation (2.11), on obtient

$$a^2 e^{at} = -\omega_0^2 e^{at}, \quad (2.22)$$

il faut donc que

$$a^2 = -\omega_0^2. \quad (2.23)$$

Il s'agit d'une équation pour le paramètre a qui a deux solutions imaginaires pures, $a = i\omega_0$ et $a = -i\omega_0$. La solution générale à l'équation (2.11) s'écrit donc comme une combinaison linéaire de ces deux solutions,

$$u(t) = \alpha e^{i\omega_0 t} + \beta e^{-i\omega_0 t}. \quad (2.24)$$

Séparons maintenant les parties réelle et imaginaire de cette expression en écrivant $\alpha = \alpha' + i\alpha''$ et $\beta = \beta' + i\beta''$, où α' , α'' , β' et β'' sont des nombres réels :

$$u(t) = (\alpha' + i\alpha'') [\cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t)] + (\beta' + i\beta'') [\cos(\omega_0 t) - i \sin(\omega_0 t)] \quad (2.25)$$

$$= (\alpha' + \beta') \cos(\omega_0 t) + (\beta'' - \alpha'') \sin(\omega_0 t) + i [(\alpha'' + \beta'') \cos(\omega_0 t) + (\alpha' - \beta') \sin(\omega_0 t)]. \quad (2.26)$$

La solution devant être réelle, le terme imaginaire doit être nul pour tout temps t , ce qui implique que $\alpha' = \beta'$ et $\alpha'' = -\beta''$, c'est à dire que α et β sont complexes conjugués. Avec ces relations, la solution s'écrit

$$u(t) = 2\alpha' \cos(\omega_0 t) - 2\alpha'' \sin(\omega_0 t). \quad (2.27)$$

α' et α'' étant des coefficients quelconques, on retrouve la solution générale (2.12).

Pour déterminer les deux coefficients A et B de la solution générale (2.12), il faut deux conditions initiales. Le plus souvent, celles-ci sont obtenues en fixant la position initiale, $u(0) = u_0$, et la vitesse initiale, $\frac{du}{dt}(0) = v_0$.

$$u(0) = u_0 = A, \quad (2.28)$$

$$\dot{u}(0) = v_0 = B\omega_0. \quad (2.29)$$

La solution est donc

$$u(t) = u_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t). \quad (2.30)$$

2.1.3 Approche énergétique

L'énergie cinétique E_c est donnée par le carré de la vitesse $\vec{v}(t) = \dot{z}(t)\vec{k}$, c'est à dire

$$E_c(t) = \frac{m}{2} \dot{z}(t)^2. \quad (2.31)$$

La force exercée par le ressort, $\vec{F}_{\text{ressort}} = -Kz\vec{k}$ (équation (2.1)), dérivée de l'énergie potentielle

$$E_{\text{p,ressort}} = \frac{K}{2} z^2. \quad (2.32)$$

Elle ne dépend que de la hauteur z , donc son gradient est un vecteur orienté selon $\vec{k}$. La force gravitationnelle dérive de l'énergie potentielle de pesanteur

$$E_{\text{p,grav}} = mgz. \quad (2.33)$$

Toutes les forces auxquelles est soumis l'objet dérivant d'une énergie potentielle, son énergie mécanique E_m est conservée, avec

$$E_m = E_c + E_{\text{p,ressort}} + E_{\text{p,grav}} = \frac{m}{2} \dot{z}^2 + \frac{K}{2} z^2 + mgz. \quad (2.34)$$

En utilisant plutôt la variable $z(t) = u(t) - \frac{mg}{K}$, on peut réexprimer l'énergie mécanique

$$E_m = \frac{m}{2} \dot{u}^2 + \frac{K}{2} \left(u - \frac{mg}{K} \right)^2 + mg \left(u - \frac{mg}{K} \right) \quad (2.35)$$

$$= \frac{m}{2} \dot{u}^2 + \frac{K}{2} \left[u^2 - \frac{2mg}{K} u + \left(\frac{mg}{K} \right)^2 \right] + mg \left(u - \frac{mg}{K} \right) \quad (2.36)$$

$$= \frac{m}{2} \dot{u}^2 + \frac{K}{2} u^2 - \frac{m^2 g^2}{2K} \quad (2.37)$$

Le dernier terme est une constante et peut être éliminé car l'énergie est définie à une constante près. Par exemple, ajouter une constante à une énergie potentielle ne change pas la force qui en dérive. On retiendra donc pour l'énergie mécanique :

$$E_m = \frac{m}{2} \dot{u}^2 + \frac{K}{2} u^2 = m \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{\omega_0^2}{2} u^2 \right). \quad (2.38)$$

Avec cette définition, l'énergie mécanique est nulle si l'objet est au point d'équilibre à vitesse nulle.

On peut vérifier que la solution générale (2.12) a une énergie mécanique constante :

$$\frac{E_m}{m} = \frac{1}{2} [-A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)]^2 + \frac{\omega_0^2}{2} [A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)]^2 \quad (2.39)$$

$$= \frac{\omega_0^2}{2} [A^2 \sin^2(\omega_0 t) - 2AB \sin(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t) + B^2 \cos^2(\omega_0 t)] \\ + \frac{\omega_0^2}{2} [A^2 \cos^2(\omega_0 t) + 2AB \sin(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t) + B^2 \sin^2(\omega_0 t)] \quad (2.40)$$

$$= \frac{\omega_0^2}{2} (A^2 + B^2) [\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)] \quad (2.41)$$

$$= \frac{\omega_0^2}{2} (A^2 + B^2). \quad (2.42)$$

Comme on peut le voir en prenant par exemple $B = 0$, les composantes cinétique et potentielle de l'énergie oscillent en opposition de phase et leur somme est constante.

Au chapitre 1, nous avons utilisé le PFD pour montrer que l'énergie mécanique était constante quand l'objet étudié n'était soumis qu'à des forces conservatives. Réciproquement, dans un problème particulier, on peut utiliser l'invariance de l'énergie mécanique pour obtenir une équation du mouvement. Faisons le calcul :

$$0 = \dot{E}_m = m (\dot{u}\ddot{u} + \omega_0^2 u\dot{u}) = m\dot{u} (\ddot{u} + \omega_0^2 u). \quad (2.43)$$

En simplifiant par la masse et la vitesse, on obtient

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0, \quad (2.44)$$

ce qui correspond bien à l'équation du mouvement de l'oscillateur harmonique (2.11). Rigoureusement, on ne peut simplifier par la vitesse $\dot{u}(t)$ que quand celle-ci est non-nulle ; cependant, on voit ici que le résultat est toujours vrai.

2.2 Oscillateur harmonique amorti

2.2.1 Équation du mouvement

En pratique, l'amplitude des oscillations d'un système masse-ressort diminue avec le temps et l'objet finit par s'arrêter. Si l'énergie mécanique diminue, c'est que des forces de frottement doivent être à l'œuvre. Ces frottements sont parfois recherchés pour *amortir* le mouvement, comme dans un amortisseur de voiture.

Le modèle de frottement le plus simple est le frottement visqueux, dont la force est proportionnelle à la vitesse et de direction opposée :

$$\vec{F}_{\text{visq}} = -k_{\text{visq}} \vec{v} = -k_{\text{visq}} \dot{u}(t) \vec{k}. \quad (2.45)$$

Cette force ajoute un terme à l'équation du mouvement (2.9) :

$$m\ddot{u}(t) = -k_{\text{visq}} \dot{u}(t) - Ku(t). \quad (2.46)$$

En définissant le coefficient de frottement réduit

$$\alpha = \frac{k_{\text{visq}}}{2m}, \quad (2.47)$$

l'équation du mouvement se réécrit

$$\ddot{u}(t) + 2\alpha\dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0. \quad (2.48)$$

C'est l'équation de l'*oscillateur harmonique amorti*. Le coefficient α est l'inverse d'un temps ; il s'agit du temps qu'il faudrait à la masse seule pour s'arrêter avec une vitesse initiale et en l'absence de ressort.

2.2.2 Résolution

Avant de résoudre l'équation complète, considérons le problème sans ressort pour nous échauffer :

$$\ddot{u}(t) + 2\alpha\dot{u}(t) = 0. \quad (2.49)$$

Il s'agit en fait d'une équation du premier ordre pour la vitesse $v(t) = \dot{u}(t)$:

$$\dot{v}(t) + 2\alpha v(t) = 0. \quad (2.50)$$

En cherchant la solution sous la forme d'une exponentielle, $v(t) = e^{at}$, on obtient l'équation $a + 2\alpha = 0$, et donc

$$v(t) = v(0)e^{-2\alpha t}. \quad (2.51)$$

On voit que le coefficient α correspond au taux de décroissance de la vitesse.

Passons maintenant à l'équation générale (2.48), qui est toujours une équation différentielle ordinaire d'ordre 2. En cherchant encore la solution sous la forme d'une exponentielle, l'équation pour le coefficient a de l'exponentielle est

$$a^2 + 2\alpha a + \omega_0^2 = 0. \quad (2.52)$$

Il s'agit de l'*équation caractéristique* de l'équation différentielle. Il s'agit d'une équation du second degré. Cette équation peut être visualisée graphiquement : en traçant le côté gauche de l'équation en fonction de la variable a , on obtient une parabole. Résoudre l'équation revient à déterminer les points d'intersection entre cette courbe et l'axe des abscisses. Il peut y en avoir deux, en seul, ou aucun ; dans ce dernier cas, l'équation admet des solutions complexes. Pour savoir dans quel cas on est, il faut calculer le discriminant :

$$\Delta = 4\alpha^2 - 4\omega_0^2 = 4(\alpha^2 - \omega_0^2). \quad (2.53)$$

Amortissement fort, régime apériodique. Si $\Delta > 0$, c'est à dire si $\alpha > \omega_0$, le système est dans le régime d'amortissement fort. les deux solutions réelles sont a_+ et a_- :

$$a_{\pm} = -\alpha \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = -\alpha \pm \beta, \quad (2.54)$$

où nous avons défini

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} < \alpha. \quad (2.55)$$

D'après cette inégalité, les deux solutions $a_{\pm}$ sont négatives. La solution à l'équation (2.48) est donc une somme d'exponentielles décroissantes :

$$u(t) = A_+ e^{a_+ t} + A_- e^{a_- t} = e^{-\alpha t} (A_+ e^{\beta t} + A_- e^{-\beta t}). \quad (2.56)$$

Ce comportement correspond au *régime apériodique*. On note que le temps de relaxation est donné par l'exponentielle qui décroît le plus lentement, c'est à dire celle correspondant à $a_+ = \beta - \alpha$; le temps de relaxation est donné par

$$\tau_{\text{relax}} = \frac{1}{|a_+|} = \frac{1}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}. \quad (2.57)$$

Avec la solution générale, la vitesse est donnée par

$$\dot{u}(t) = a_+ A_+ e^{a_+ t} + a_- A_- e^{a_- t}. \quad (2.58)$$

Pour obtenir la solution avec condition initiale $u(0) = u_0$, $\dot{u}(0) = 0$, il faut donc résoudre le système

$$u_0 = u(0) = A_+ + A_-, \quad (2.59)$$

$$0 = \dot{u}(0) = a_+ A_+ + a_- A_-. \quad (2.60)$$

Pour le résoudre, il suffit de diviser la deuxième équation par a_+ ou a_- et de la soustraire à la première, ainsi :

$$u_0 = \left(1 - \frac{a_+}{a_-}\right) A_+, \quad (2.61)$$

$$u_0 = \left(1 - \frac{a_-}{a_+}\right) A_-. \quad (2.62)$$

Finalement, on obtient

$$A_+ = \frac{a_-}{a_- - a_+} u_0 = \frac{\alpha + \beta}{2\beta} u_0, \quad (2.63)$$

$$A_- = \frac{a_+}{a_+ - a_-} u_0 = -\frac{\alpha - \beta}{2\beta} u_0. \quad (2.64)$$

La solution complète s'écrit donc

$$u(t) = \frac{u_0}{2\beta} \left[(\alpha + \beta) e^{a_+ t} - (\alpha - \beta) e^{a_- t} \right] \quad (2.65)$$

$$= \frac{u_0}{2\beta} e^{-\alpha t} \left[(\alpha + \beta) e^{\beta t} - (\alpha - \beta) e^{-\beta t} \right] \quad (2.66)$$

$$= u_0 e^{-\alpha t} \left[\text{ch}(\beta t) + \frac{\alpha}{\beta} \text{sh}(\beta t) \right]. \quad (2.67)$$

Amortissement faible, régime pseudo-périodique. Si $\Delta < 0$, c'est à dire si $\alpha < \omega_0$, le système est dans le régime d'amortissement faible. Dans ce cas les solutions sont complexes conjuguées :

$$a_{\pm} = -\alpha \pm \frac{i}{2} \sqrt{|\Delta|} = -\alpha \pm i\omega, \quad (2.68)$$

où nous avons défini

$$\omega = \sqrt{|\Delta|} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}. \quad (2.69)$$

La solution à l'équation (2.48) est alors

$$u(t) = A_+ e^{a_+ t} + A_- e^{a_- t} = e^{-\alpha t} \left(A_+ e^{i\omega t} + A_- e^{-i\omega t} \right). \quad (2.70)$$

Tout est en fait comme avant, en remplaçant β par $i\omega$. La complication supplémentaire vient du fait que la solution (2.70) contient des exponentielles complexes et des coefficients qui peuvent être complexes, mais qu'elle doit malgré tout être réelle.

Pour voir comment aboutir à une expression explicitement réelle, commençons par résoudre le problème avec les conditions initiales $u(0) = u_0$ et $\dot{u}(0) = 0$. Pour cela, reprenons l'expression (2.66) en remplaçant β par $i\omega$:

$$u(t) = \frac{u_0}{2i\omega} e^{-\alpha t} \left[(\alpha + i\omega) e^{i\omega t} - (\alpha - i\omega) e^{-i\omega t} \right] \quad (2.71)$$

$$= u_0 e^{-\alpha t} \left[\cos(\omega t) + \frac{\alpha}{\omega} \sin(\omega t) \right]. \quad (2.72)$$

On voit apparaître une forme *pseudo-périodique*, ou *sous-amorti*, avec des oscillations de pulsation ω (équation (2.69)), décalée de la pulsation de l'oscillateur harmonique non amorti, multipliées par une exponentielle décroissante avec un temps caractéristique

$$\tau_{\text{relax}} = \frac{1}{\alpha}. \quad (2.73)$$

La forme de la solution (2.72), peut être généralisée pour toute solution de la forme (2.70), sur le modèle de ce que nous avons fait sans frottements (section 2.1.2). Écrivons explicitement les parties réelle et imaginaire des coefficients $A_{\pm}$ de l'équation :

$$A_{\pm} = A'_{\pm} + iA''_{\pm}. \quad (2.74)$$

La solution générale (2.72) s'écrit alors

$$u(t) = e^{-\alpha t} (A_+ e^{i\omega t} + A_- e^{-i\omega t}), \quad (2.75)$$

$$= e^{-\alpha t} [(A'_+ + iA''_+) (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) + (A'_- + iA''_-) (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t))] \quad (2.76)$$

$$= e^{-\alpha t} [(A'_+ + A'_-) \cos(\omega t) - (A''_+ - A''_-) \sin(\omega t)] \\ + i e^{-\alpha t} [(A''_+ + A''_-) \cos(\omega t) + (A'_+ - A'_-) \sin(\omega t)]. \quad (2.77)$$

Pour que la solution soit réelle, les coefficients qui apparaissent dans la partie imaginaire doivent être nuls, ce qui impose $A'_+ = A'_-$ et $A''_+ = -A''_-$: comme précédemment, A_+ et A_- sont complexes conjugués. Avec cette propriété, il reste

$$u(t) = e^{-\alpha t} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)], \quad (2.78)$$

où nous avons introduit, pour simplifier les notations, $A = 2A'_+$ et $B = -2A''_+$; cette solution est bien de la même forme que la solution particulière (2.72).

La solution (2.78) n'est pas périodique. En revanche, elle garde la même forme après une pseudo-période $T = 2\pi/\omega$:

$$u(t + T) = e^{-\alpha T} u(t). \quad (2.79)$$

Décalée d'une pseudo-période, elle est identique à un coefficient multiplicatif près, que l'on peut aussi exprimer avec le *décrément logarithmique*

$$\delta = \ln \left(\frac{u(t)}{u(t + T)} \right) = \alpha T = \frac{2\pi\alpha}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}. \quad (2.80)$$

En particulier, le décrément logarithmique peut se calculer avec la valeur de la fonction $u(t)$ aux maxima locaux t_k^* , où $k \in \mathbb{Z}$ est un nombre entier qui indique le maximum considéré. D'après la relation (2.79), ces maxima sont séparés de T , c'est à dire que $t_k^* = t_0^* + kT$. On peut donc obtenir le décrément logarithmique en considérant deux maxima successifs :

$$\delta = \ln \left(\frac{u(t_k^*)}{u(t_{k+1}^*)} \right), \quad (2.81)$$

où même deux maxima locaux séparés de n pseudo-périodes,

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{u(t_k^*)}{u(t_{k+n}^*)} \right). \quad (2.82)$$

Régime critique. Intéressons-nous enfin au cas intermédiaire, $\alpha = \omega_0$, appelé *régime critique*. Dans ce cas, le discriminant de l'équation caractéristique est nul, $\Delta = 0$, et celle-ci possède une racine “double”,

$$a = -\alpha = -\omega_0. \quad (2.83)$$

La solution à l'équation (2.48) est alors

$$u(t) = (A + Bt)e^{-\alpha t}. \quad (2.84)$$

Le terme $te^{-\alpha t}$ n'est pas de la forme habituel et peut paraître surprenant. Vérifions que la forme (2.84) est bien solution :

$$\dot{u}(t) = Be^{-\alpha t} - \alpha(A + Bt)e^{-\alpha t} \quad (2.85)$$

$$= (B - \alpha A - \alpha Bt)e^{-\alpha t}, \quad (2.86)$$

$$\ddot{u}(t) = -\alpha Be^{-\alpha t} - \alpha(B - \alpha A - \alpha Bt)e^{-\alpha t} \quad (2.87)$$

$$= (\alpha^2 A - 2\alpha B + \alpha^2 Bt)e^{-\alpha t}. \quad (2.88)$$

On peut déjà voir que les dérivées successives sont de la forme $\frac{d^n u(t)}{dt^n} = (A_n + B_n t)e^{-\alpha t}$. Regroupons les différents termes :

$$\ddot{u}(t) + 2\alpha\dot{u}(t) + \alpha^2 u(t) = e^{-\alpha t} \left[(\alpha^2 A - 2\alpha B + \alpha^2 Bt) + 2\alpha(B - \alpha A - \alpha Bt) + \alpha^2(A + Bt) \right], \quad (2.89)$$

$$= e^{-\alpha t} \left[\alpha^2 A - 2\alpha B + 2\alpha(B - \alpha A) + \alpha^2 A + (\alpha^2 B - 2\alpha^2 B + \alpha^2 B)t \right] \quad (2.90)$$

$$= 0. \quad (2.91)$$

Déterminons les coefficients A et B avec les conditions initiales $u(0) = u_0$, $\dot{u}(0) = 0$. Les équations sont

$$u_0 = u(0) = A, \quad (2.92)$$

$$0 = \dot{u}(0) = B - \alpha A. \quad (2.93)$$

Donc $A = u_0$ et $B = \alpha A$, donc

$$u(t) = u_0(1 + \alpha t)e^{-\alpha t}. \quad (2.94)$$

Cette expression s'écrit comme le produit d'un terme qui diverge et d'un terme qui tend vers 0 ; c'est l'exponentielle qui gagne et le résultat tend vers 0 avec un temps de relaxation $1/\alpha$. Ce retour se fait sans oscillations ; on voit par exemple que $u(t)$ ne s'annule exactement jamais.

2.2.3 Approche énergétique

Dans la section précédente, nous avons résolu l'équation de l'oscillateur harmonique amorti pour toutes les valeurs des paramètres. Nous allons ici voir comment les énergies cinétique, potentielle et mécanique évoluent au cours du mouvement.

Nous avons vu dans la section 2.1.3 que l'oscillateur harmonique n'était soumis qu'à des forces conservatives et que, par conséquent, son énergie mécanique E_m était conservée. L'oscillateur harmonique amorti est en plus soumis à la force de friction $\vec{F}_{\text{visq}} = -k_{\text{visq}}\vec{v}$, qui n'est pas conservative car elle dépend de la vitesse et ne peut donc pas s'exprimer comme le gradient d'une fonction de la position. La puissance de cette force est

$$P_{\vec{F}_{\text{visq}}}(t) = -k_{\text{visq}}\vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t) = -k_{\text{visq}}\vec{v}(t)^2 = -k_{\text{visq}}\dot{u}(t)^2 \leq 0. \quad (2.95)$$

D'après la dernière inégalité, l'oscillateur harmonique amorti perd de l'énergie, donc son énergie mécanique décroît au cours du temps. On peut aussi noter que la puissance dissipée n'est pas constante puisqu'elle est associée à la vitesse de l'objet. Dans les solutions que nous avons obtenues, la vitesse n'est pas constante. En particulier, dans le régime pseudo-périodique, la vitesse oscille : elle est nulle quand la position est localement extrême (maximale ou minimale), positions dans lesquelles l'énergie dissipée est nulle, et non-nulle entre les extrêmes. On peut aussi remarquer que la puissance dissipée est proportionnelle à l'énergie cinétique :

$$P_{\vec{F}_{\text{visq}}}(t) = -\frac{2k_{\text{visq}}}{m}E_c(t). \quad (2.96)$$

Remarque 2.2. L'énergie “perdue” par le système par frottement est dissipée sous forme de chaleur dans l'environnement. L'énergie du système composé de l'oscillateur et de son environnement est conservée, et les frottements convertissent l'énergie mécanique du système en énergie thermique de l'environnement. On ne cherche pas ici à définir l'énergie thermique, mais c'est tout à fait possible.

Nous n'allons pas étudier tous les régimes en détail ; contentons-nous d'un exemple : l'énergie cinétique du régime pseudo-périodique. D'après la solution (2.78), la vitesse est

$$\dot{u}(t) = (-\alpha [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] + \omega [-A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)]) e^{-\alpha t} \quad (2.97)$$

$$= [(-\alpha A + \omega B) \cos(\omega t) - (\omega A + \alpha B) \sin(\omega t)] e^{-\alpha t}. \quad (2.98)$$

L'énergie cinétique est donc

$$E_c(t) = e^{-2\alpha t} [(-\alpha A + \omega B) \cos(\omega t) - (\omega A + \alpha B) \sin(\omega t)]^2. \quad (2.99)$$

C'est le produit d'une exponentielle décroissante et d'une fonction oscillante positive (l'énergie cinétique est toujours positive). Comme en l'absence d'amortissement, l'énergie cinétique oscille en « échangeant » de l'énergie avec l'énergie potentielle ; ici, l'amplitude des oscillations diminue avec le temps. En revanche, l'énergie mécanique ne peut que décroître.

2.3 Pendule pesant

2.3.1 Équation du mouvement

Définition du système. On considère dans cette section un objet de masse m suspendu à un point fixe via une tige de longueur ℓ sans masse, qui peut pivoter autour du point fixe. L'origine du repère est placée au point fixe. La tige et la masse peuvent bouger dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{k})$. L'objet n'a qu'un seul degré de liberté : l'angle θ entre la verticale et la tige. Plus précisément, on définit le vecteur unitaire $\vec{u}_r$ qui pointe de l'origine vers l'objet ; alors θ est l'angle entre $-\vec{k}$ et $\vec{u}_r$.

L'objet est soumis à la gravité :

$$\vec{F}_{\text{grav}} = -mg\vec{k}. \quad (2.100)$$

Il est aussi soumis à la traction de la tige, qui est une force centrale de centre O :

$$\vec{F}_{\text{tige}} = -T\vec{u}_r, \quad (2.101)$$

où T est la valeur de la tension, une valeur positive indiquant une force pointant vers l'origine, et $\vec{u}_r$ est le vecteur unitaire pointant de l'origine vers l'objet. La valeur de la tension n'est pas connue et peut varier au cours du temps.

Approche énergétique. Le seul degré de liberté étant un angle, et le mouvement de l'objet étant restreint à un cercle (centré sur l'origine et dont le rayon est donné par longueur de la tige), il n'est pas pratique d'utiliser le principe fondamental de la dynamique avec les coordonnées cartésiennes pour obtenir l'équation du mouvement. Pour établir celle-ci, plusieurs méthodes sont possibles :

- Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique en coordonnées cylindriques.
- Utiliser le théorème du moment cinétique.
- Utiliser une approche énergétique.

La dernière méthode est en fait la plus simple, et nous commençons par celle-ci.

Déterminons les énergies en jeu dans le problème. L'énergie cinétique est donnée par la vitesse de l'objet, qui s'écrit :

$$\vec{v}(t) = \ell \dot{\theta}(t) \vec{u}_\theta. \quad (2.102)$$

Notons que pour parvenir à ce résultat, nous avons utilisé que

$$\frac{d\vec{u}_r(t)}{dt} = \dot{\theta}(t) \vec{u}_\theta(t). \quad (2.103)$$

L'énergie cinétique est donc

$$E_c(t) = \frac{m}{2} \ell^2 \dot{\theta}(t)^2. \quad (2.104)$$

L'énergie potentielle de pesanteur est donnée par la hauteur de l'objet, qui vaut

$$z(t) = -\ell \cos(\theta(t)), \quad (2.105)$$

donc

$$E_{p,\text{grav}}(t) = mgz(t) = -mg\ell \cos(\theta(t)). \quad (2.106)$$

Finalement, il faut considérer la traction de la tige. Comme sa valeur n'est pas connue, on ne peut pas savoir si elle est conservative. Calculons donc sa puissance :

$$P_{\vec{F}_{\text{tige}}} = \vec{F}_{\text{tige}}(t) \cdot \vec{v}(t) = -T(t) \vec{u}_r \cdot \ell \dot{\theta}(t) \vec{u}_\theta = 0, \quad (2.107)$$

car $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\theta = 0$. Ainsi, l'énergie mécanique est conservée. Elle s'écrit explicitement

$$E_m(t) = E_c(t) + E_{p,\text{grav}}(t) = \frac{m\ell^2}{2} \dot{\theta}(t)^2 - mg\ell \cos(\theta(t)). \quad (2.108)$$

Pour obtenir l'équation du mouvement, il faut dériver l'énergie mécanique par rapport au temps :

$$0 = \dot{E}_m(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{m\ell^2}{2} \dot{\theta}(t)^2 - mg\ell \cos(\theta(t)) \right] \quad (2.109)$$

$$= m\ell^2 \dot{\theta}(t) \ddot{\theta}(t) + mg\ell \dot{\theta}(t) \sin(\theta(t)) \quad (2.110)$$

$$= m\ell^2 \dot{\theta}(t) \left[\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{\ell} \sin(\theta(t)) \right]. \quad (2.111)$$

Sauf quand le pendule est immobile à l'équilibre, le terme $\dot{\theta}(t)$ en facteur ne s'annule que ponctuellement, donc le terme entre crochets est nul :

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{\ell} \sin(\theta(t)) = 0. \quad (2.112)$$

Cette équation est l'équation du mouvement.

Comme l'angle $\theta(t)$ et le sinus sont sans dimension, g/ℓ est l'inverse d'un temps au carré, on peut donc définir la pulsation

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}, \quad (2.113)$$

qui permet de réécrire l'équation du mouvement

$$\ddot{\theta}(t) + \omega_0^2 \sin(\theta(t)) = 0. \quad (2.114)$$

Cette équation ressemble à celle de l'oscillateur harmonique : c'est une équation différentielle ordinaire d'ordre 2 à coefficients constants. La seule différence est la présence du sinus, mais elle est de taille : elle rend l'équation non linéaire, et donc beaucoup plus difficile à résoudre. Nous verrons néanmoins qu'on peut dire beaucoup de choses sur le comportement de cette équation.

Théorème du moment cinétique. Voyons maintenant comment obtenir l'équation du mouvement (2.112) en utilisant le théorème du moment cinétique. Le moment cinétique par rapport à l'origine est :

$$\vec{L}_O(t) = \vec{r}(t) \wedge m\vec{v}(t) = \ell\vec{u}_r \wedge m\ell\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta = -m\ell^2\dot{\theta}(t)\vec{j}, \quad (2.115)$$

où nous avons utilisés que $\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = -\vec{j}$.

Le moment du poids est donné par

$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_{\text{grav}}, O} = \vec{r}(t) \wedge \vec{F}_{\text{grav}} \quad (2.116)$$

$$= \ell\vec{u}_r \wedge (-mg\vec{k}) \quad (2.117)$$

$$= -mg\ell \left[-\cos(\theta(t))\vec{k} + \sin(\theta(t))\vec{i} \right] \wedge \vec{k} \quad (2.118)$$

$$= mg\ell \sin(\theta(t))\vec{j}. \quad (2.119)$$

La traction de la tige étant une force centrale, son moment est nul. D'après le théorème du moment cinétique, on a donc

$$\frac{d\vec{L}_O(t)}{dt} = -m\ell^2\ddot{\theta}(t)\vec{j} = \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_{\text{grav}}, O} = mg\ell \sin(\theta(t))\vec{j}; \quad (2.120)$$

en simplifiant, on retrouve bien l'équation (2.112).

PFD en coordonnées cylindriques. Finalement, utilisons le principe fondamental de la dynamique en coordonnées cylindriques. Commençons par calculer l'accélération :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\ell\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta(t) \right] = \ell\ddot{\theta}(t)\vec{u}_\theta(t) + \ell\dot{\theta}(t)\frac{d\vec{u}_\theta(t)}{dt} = \ell\ddot{\theta}(t)\vec{u}_\theta(t) - \ell\dot{\theta}(t)^2\vec{u}_r(t). \quad (2.121)$$

Le PFD, $m\vec{a}(t) = \vec{F}_{\text{grav}} + \vec{F}_{\text{tige}}$, s'écrit donc

$$m\ell \left[\ddot{\theta}(t)\vec{u}_\theta(t) - \dot{\theta}(t)^2\vec{u}_r(t) \right] = -mg\vec{k} - T(t)\vec{u}_r(t). \quad (2.122)$$

C'est une égalité vectorielle.

Pour obtenir des informations sur les composantes, on peut la projeter sur $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$. Pour cela, il faut utiliser que $\vec{u}_r(t) \cdot \vec{k} = -\cos(\theta(t))$ et $\vec{u}_\theta(t) \cdot \vec{k} = \sin(\theta(t))$. La projection sur $\vec{u}_\theta$ donne :

$$m\ell\ddot{\theta}(t) = -mg\sin(\theta(t)), \quad (2.123)$$

qui est bien l'équation du mouvement (2.112). La projection sur $\vec{u}_r$ donne :

$$-m\ell\dot{\theta}(t)^2 = mg \cos(\theta(t)) - T(t). \quad (2.124)$$

Cette équation permet d'exprimer la tension à partir des autres variables du problème. On reconnaît notamment les énergies cinétique et potentielles :

$$T(t) = m\ell\dot{\theta}(t)^2 + mg \cos(\theta(t)) = \frac{2E_c(t) - E_p(t)}{\ell}. \quad (2.125)$$

2.3.2 Limite de faible amplitude

Équation du mouvement. Reprenons l'équation du mouvement (2.114) :

$$\ddot{\theta}(t) = -\omega_0^2 \sin(\theta(t)). \quad (2.126)$$

Considérons maintenant des oscillations de faible amplitude, c'est à dire $|\theta(t)| \ll 1$ (que l'on peut comprendre comme $|\theta(t)| < 0,1$). Pour de telles amplitudes, on peut alors utiliser le développement de Taylor du sinus :

$$\sin(\theta) = \theta + \mathcal{O}(\theta^3) \simeq \theta ; \quad (2.127)$$

la première égalité est celle qui est mathématiquement rigoureuse, qui indique que le terme manquant est d'ordre θ^3 , la deuxième est celle que nous utiliserons. En utilisant cette approximation dans l'équation (2.126), nous obtenons

$$\ddot{\theta}(t) \simeq -\omega_0^2 \theta(t), \quad (2.128)$$

qui est l'équation de l'oscillateur harmonique (équation (2.11)). Dans la limite de faible amplitude, le pendule se ramène donc à un oscillateur harmonique et tout ce qui a été dit sur ce dernier s'applique au pendule dans cette limite, notamment sur l'effet des frottements.

Énergies. Regardons comment cette correspondance avec l'oscillateur harmonique apparaît dans l'énergie. L'énergie cinétique (2.104) a la même forme que pour l'oscillateur harmonique (équation (2.31)), au coefficient près : elle fait intervenir le carré de la dérivée temporelle de la variable qui nous intéresse, $\theta(t)$ ici. En revanche, l'énergie potentielle (2.106) fait intervenir une fonction trigonométrique,

$$E_p(t) = -mg\ell \cos(\theta(t)). \quad (2.129)$$

Si l'amplitude est faible, on peut utiliser le développement de Taylor du cosinus :

$$\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \mathcal{O}(\theta^4) \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}. \quad (2.130)$$

Notons que, contrairement au sinus que nous avons développé à l'ordre 1, nous devons développer le cosinus à l'ordre 2. Dans l'énergie potentielle, cela donne

$$E_p(t) \simeq -mg\ell \left[1 - \frac{\theta(t)^2}{2} \right] = -mg\ell + \frac{mg\ell}{2} \theta(t)^2. \quad (2.131)$$

Le premier terme est une constante, indépendante de la variable $\theta(t)$, qui dépend de la référence prise pour la hauteur ; on peut donc se débarrasser de ce terme et retenir

$$E_p(t) \simeq \frac{mg\ell}{2} \theta(t)^2, \quad (2.132)$$

qui est bien de la même forme que l'énergie potentielle de l'oscillateur harmonique (équation (2.32)).

2.3.3 Comportement à grande amplitude

Nous ne pouvons pas résoudre explicitement l'équation du mouvement du pendule (2.114). Nous savons simplement que, dans la limite de faible amplitude, elle se ramène à l'équation de l'oscillateur harmonique.

Nous allons voir que l'approche énergétique nous permet de décrire qualitativement le mouvement hors de la limite de faible amplitude. L'énergie potentielle du pendule est

$$E_p(\theta) = -mg\ell \cos(\theta). \quad (2.133)$$

Comme l'énergie potentielle de l'oscillateur harmonique, elle est nulle en $\theta = 0$. La principale différence est que l'énergie potentielle du pendule est *bornée*, alors que celle de l'oscillateur harmonique tend vers l'infini quand $|u|$ tend vers l'infini.

Pour l'oscillateur harmonique, quelle que soit l'énergie mécanique initiale $E_m(0)$, il existe une valeur du déplacement u^* telle que $E_p(u^*) = E_m(0)$. La conservation de l'énergie mécanique donne

$$E_p(u^*) = E_m(0) = E_m(t) = E_c(t) + E_p(t) \geq E_p(t). \quad (2.134)$$

C'est à dire que les positions accessibles ont une énergie potentielle inférieure à $E_m(0)$. Quand le système atteint la position u^* , son énergie cinétique est nulle et il fait demi-tour. On observe alors des oscillations d'amplitude u^* .

Pour le pendule, l'énergie potentielle (2.133) est bornée :

$$-mg\ell \leq E_p \leq mg\ell. \quad (2.135)$$

Le maximum, $E_p = mg\ell$, est atteint pour $\theta = (2k + 1)\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, correspondant au pendule pointant vers le haut ($\vec{u}_r = \vec{k}$). Comme l'énergie cinétique est positive, l'énergie mécanique vérifie

$$E_m \geq -mg\ell. \quad (2.136)$$

On distingue alors deux cas :

- $E_m \leq mg\ell$: ce cas est analogue au cas de l'oscillateur harmonique, il existe un angle θ^* tel que $E_m = E_p(\theta^*)$. On observe alors des oscillations d'amplitude θ^* . C'est le régime *oscillant*.
- $E_m > mg\ell$: dans ce cas, l'énergie cinétique est toujours strictement positif, le pendule ne s'arrête jamais et tourne toujours dans le même sens. C'est le régime *tournant*.

Remarque 2.3. On peut trouver une analogie avec une bille : là où l'oscillateur harmonique peut être représenté par le mouvement d'une bille dans un bol infiniment profond, qui est nécessairement oscillant, le pendule peut être représenté par le mouvement d'une bille sur une tôle ondulée. Dans le deuxième cas, suivant les conditions initiales, la bille peut soit restée confinée dans une « vallée » (régime oscillant), soit parcourir une longue distance (régime tournant).

En présence de frottements visqueux, la puissance serait

$$P_{\vec{F}_{\text{visq}}}(t) = -k_{\text{visq}}\ell^2\dot{\theta}(t)^2. \quad (2.137)$$

Dans ce cas, le pendule finit toujours par s'immobiliser à la position d'équilibre. S'il est initialement dans l'état tournant, il ralentit et passe dans l'état oscillant, puis l'amplitude de ses oscillations diminue.

Chapitre 3

Mouvements à force centrale

3.1 Introduction et propriétés

3.1.1 Définition, conservation du moment cinétique

Dans un référentiel galiléen d'origine O , une *force centrale* est une force qui, au point M , est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$.

Comme nous l'avons vu en section 1.4.2, une force centrale conserve le moment cinétique

$$\vec{L}(t) = \vec{r}(t) \wedge m\vec{v}(t) \quad (3.1)$$

parce que son moment est nul.

La conservation du moment cinétique, $\vec{L}(t) = \vec{L}$, a une conséquence importante : comme $\vec{L}$ est perpendiculaire à la fois à la position $\vec{r}(t)$ et à la vitesse $\vec{v}(t)$, le mouvement se fait dans le plan perpendiculaire à $\vec{L}$ qui contient l'origine.

3.1.2 Exemples

Dans le système solaire, en prenant pour l'origine O le centre du Soleil (référentiel héliocentrique), l'attraction gravitationnelle ressentie par une planète de masse m est une force centrale :

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{u}_r, \quad (3.2)$$

où r est la distance entre la planète et le centre du Soleil,

$$G = 6,7 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \quad (3.3)$$

est la constante gravitationnelle et

$$M = 2,0 \times 10^{30} \text{ kg} \quad (3.4)$$

est la masse du Soleil. La masse de la Terre est par exemple

$$m_{\text{Terre}} = 6,0 \times 10^{24} \text{ kg}, \quad (3.5)$$

et sa distance au Soleil est d'environ

$$r_{\text{Terre}} \simeq 1,5 \times 10^8 \text{ km}. \quad (3.6)$$

À une échelle beaucoup plus petite, l'attraction électrostatique ressentie par un électron proche d'un noyau de charge Ze est donnée par la loi de Coulomb :

$$\vec{F} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon r^2}\vec{u}_r, \quad (3.7)$$

où

$$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (3.8)$$

est la charge élémentaire et

$$\epsilon = 8,9 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1} \quad (3.9)$$

est la permittivité du vide.

En dépit des valeurs très différentes, ces forces ont la même forme : ce sont des forces centrales et elles décroissent comme le carré de la distance.

3.1.3 Lois de Kepler

Avant qu'Isaac Newton ne développe sa théorie de la gravitation, combinaison de l'attraction gravitationnelle (3.2) et des lois de la dynamique, dans la deuxième moitié du 17^{ème} siècle, des astronomes avaient décrit le mouvement des planètes à l'aide de lois empiriques.

Par exemple, Johannes Kepler a établi les trois lois suivantes :

1. Les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques, dont le Soleil occupe l'un des foyers.
2. Des aires égales sont “balayées” dans des temps égaux ; c'est la *loi des aires*.
3. Le carré de la période T d'une planète est directement proportionnel au cube du demi-grand axe a de la trajectoire elliptique de la planète, soit $T^2/a^3 = k$ avec k une constante valable pour tout le système solaire.

Ces lois sont utiles car elles doivent être vérifiées par les théories proposées.

On peut déjà voir que la loi des aires est une conséquence de la conservation du moment cinétique, que l'on peut réécrire $\vec{r}(t) \wedge \vec{v}(t) = \vec{L}/m$. L'aire “balayée” par la trajectoire dont il est question peut se définir pour un court intervalle de temps δt , au cours duquel la particule passe de la position $\vec{r}(t)$ à la position $\vec{r}(t + \delta t) \simeq \vec{r}(t) + \vec{v}(t)\delta t$: il s'agit de l'aire du triangle $(O, \vec{r}(t), \vec{r}(t + \delta t))$. Or, l'aire de ce triangle est donnée par

$$\delta A = \frac{\|\vec{r}(t) \wedge [\vec{r}(t + \delta t) - \vec{r}(t)]\|}{2} \simeq \frac{\|\vec{r}(t) \wedge \vec{v}(t)\|\delta t}{2} = \frac{\|\vec{L}\|}{2m}\delta t ; \quad (3.10)$$

elle ne dépend pas de la position $\vec{r}(t)$ et est proportionnelle à δt .

3.2 Résolution

3.2.1 Trajectoires circulaires

Commençons par traiter le cas des trajectoires circulaires, qui est beaucoup plus simple que le cas général. Une trajectoire circulaire est définie par son rayon r , qui est indépendant du temps, et sa vitesse de rotation ω . On peut alors calculer la vitesse et l'accélération :

$$\vec{v}(t) = \omega r \vec{u}_\theta(t), \quad (3.11)$$

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 r \vec{u}_r(t). \quad (3.12)$$

Le principe fondamental de dynamique avec l'attraction gravitationnelle (3.2) s'écrit alors, après simplification de la masse :

$$\omega^2 r = \frac{GM}{r^2}, \quad (3.13)$$

d'où l'on déduit que

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}. \quad (3.14)$$

La période vaut $T = \omega/(2\pi)$, donc

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} : \quad (3.15)$$

on a retrouvé la troisième loi de Kepler.

3.2.2 Formules de Binet

On cherche maintenant plutôt à calculer la trajectoire, c'est à dire l'ensemble des points par lesquels passe l'objet, que le mouvement complet. En coordonnées polaires, la trajectoire peut être décrite par la fonction $r(\theta)$. Pour déterminer cette fonction, utilisons-la pour écrire la vitesse et l'accélération.

En coordonnées polaires, le mouvement est décrit par les deux fonctions $r(t)$ et $\theta(t)$, à partir desquelles on peut écrire la position, la vitesse et l'accélération :

$$\vec{r}(t) = r(t)\vec{u}_r(t), \quad (3.16)$$

$$\vec{v}(t) = \dot{r}(t)\vec{u}_r(t) + r(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta(t), \quad (3.17)$$

$$\vec{a}(t) = [\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\theta}(t)^2] \vec{u}_r(t) + [2\dot{r}(t)\dot{\theta}(t) + r(t)\ddot{\theta}(t)] \vec{u}_\theta(t). \quad (3.18)$$

À partir de la position et de la vitesse, on peut écrire le moment cinétique :

$$\vec{L} = \vec{r}(t) \wedge m\vec{v}(t) = mr(t)^2\dot{\theta}(t)\vec{k}, \quad (3.19)$$

où $\vec{k} = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta$. On introduit la constante $C = \|\vec{L}\|/m$; on peut donc écrire

$$r(t)^2\dot{\theta}(t) = C ; \quad (3.20)$$

où $C/2$ est la *vitesse aréolaire*. Cette relation permet d'exprimer la vitesse angulaire en fonction de la distance à l'origine ; nous allons l'utiliser pour écrire la vitesse et l'accélération avec la fonction $r(\theta)$.

Pour écrire la vitesse, il faut exprimer

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{C}{r^2} = -C \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) = -C \frac{du}{d\theta}, \quad (3.21)$$

où nous avons introduit la nouvelle fonction

$$u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}. \quad (3.22)$$

La deuxième composante de la vitesse fait intervenir

$$r\dot{\theta} = \frac{C}{r} = Cu. \quad (3.23)$$

La vitesse est ainsi

$$\vec{v} = -C \frac{du}{d\theta} \vec{u}_r + Cu \vec{u}_\theta. \quad (3.24)$$

Cette expression est la première formule de Binet.

Exprimons maintenant l'accélération, en commençant par la deuxième composante (la composante azimuthale, selon $\vec{u}_\theta$) :

$$2\dot{r}(t)\dot{\theta}(t) + r(t)\ddot{\theta}(t) = \frac{1}{r(t)} \frac{d}{dt} \left[r(t)^2 \dot{\theta}(t) \right] = 0, \quad (3.25)$$

d'après la relation (3.20). L'annulation de cette composante est une conséquence de la loi des aires, qui est une conséquence de la force centrale ; c'est normal, d'après le principe fondamental de la dynamique, l'accélération doit être radiale. Exprimons donc la partie radiale en fonction de $u(\theta)$:

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} \left(-C \frac{du}{d\theta} \right) = -\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2 u}{d\theta^2}. \quad (3.26)$$

L'accélération est donc

$$\vec{a} = \left(-\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2 u}{d\theta^2} - \frac{C^2}{r^3} \right) \vec{u}_r = -\frac{C^2}{r^2} \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) \vec{u}_r. \quad (3.27)$$

Cette expression est la deuxième formule de Binet.

Remarque 3.1. Les formules de Binet s'appliquent à tout mouvement qui vérifie la loi des aires, c'est à dire à tout mouvement à force centrale. La dérivation des trajectoires qui suit dépend aussi de la forme de l'interaction.

3.2.3 Principe Fondamental de la Dynamique

Appliquons le principe fondamental de la dynamique avec la deuxième formule de Binet (3.27) et l'attraction gravitationnelle (3.2) :

$$-\frac{mC^2}{r^2} \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) \vec{u}_r = -\frac{GMm}{r^2} \vec{u}_r. \quad (3.28)$$

En simplifiant par $-m/r^2$, on arrive à :

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{C^2}. \quad (3.29)$$

On reconnaît l'équation de l'oscillateur harmonique (2.11) avec un terme constant, que l'on peut absorber dans u .

La solution à cette équation est donc

$$u(\theta) = \frac{GM}{C^2} + A \cos(\theta) = \frac{1 + e \cos(\theta)}{r_0}, \quad (3.30)$$

où nous avons choisi l'origine des angles pour que le terme en sinus soit nul et défini l'*excentricité* e et

$$r_0 = \frac{C^2}{GM}. \quad (3.31)$$

La trajectoire est donc donnée par

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 + e \cos(\theta)}. \quad (3.32)$$

Nous allons maintenant discuter les propriétés de ces trajectoires.

Remarque 3.2. Les trajectoires dépendent de la masse M de l'astre autour duquel l'objet orbite, mais pas de la masse m de cet objet, qui se simplifie entre l'inertie et la force gravitationnelle. Cette remarque suggère que les photons, dont la masse est nulle, pourraient ressentir la gravité ; c'est bien le cas !

3.3 Propriétés des trajectoires

3.3.1 Géométrie

Coniques. Les orbites décrites par l'équation (3.32) sont des coniques dont le type dépend de l'excentricité e . Le cercle correspond à la solution d'excentricité nulle, $e = 0$. En effet, l'expression (3.32) n'est définie que quand le dénominateur est strictement positif, ce qui n'est le cas pour tout angle θ que quand $|e| < 1$; dans ce cas, l'orbite est une ellipse. Quand $|e| = 1$, l'orbite est une parabole, et elle est une hyperbole quand $|e| > 1$; elle n'est alors définie que dans un intervalle.

Sur une trajectoire, on distingue les points suivants :

- *Périastre* : point le plus proche de l'astre autour duquel l'objet gravite. On parle de *périhélie* pour une trajectoire autour du Soleil et de *périgée* pour une trajectoire autour de la Terre. D'après l'équation (3.32), la distance à l'astre est alors

$$r_{\min} = \frac{r_0}{1 + e}. \quad (3.33)$$

- *Apoabside* : point le plus proche de l'astre autour duquel l'objet gravite pour une trajectoire elliptique. On parle d'*aphélie* pour une trajectoire autour du Soleil et d'*apogée* pour une trajectoire autour de la Terre. D'après l'équation (3.32), la distance à l'astre est alors

$$r_{\max} = \frac{r_0}{1 - e}. \quad (3.34)$$

Coordonnées cartésiennes. On peut facilement écrire l'équation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes :

$$r_0 = r[1 + e \cos(\theta)] = r + ex = \sqrt{x^2 + y^2} + ex. \quad (3.35)$$

On peut ensuite isoler la racine carrée, $\sqrt{x^2 + y^2} = r_0 - ex$, puis prendre le carré :

$$x^2 + y^2 = r_0^2 + e^2 x^2 - 2er_0 x, \quad (3.36)$$

que l'on peut réécrire

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 + 2er_0 x = r_0^2. \quad (3.37)$$

Quand $|e| = 1$, le premier terme s'annule et on obtient bien une parabole :

$$y^2 = -2er_0 x + r_0^2 = -2er_0 \left(x - \frac{r_0}{2e}\right). \quad (3.38)$$

Quand $|e| \neq 1$, on peut se débarrasser du terme linéaire :

$$r_0^2 = (1 - e^2)x^2 + y^2 + 2er_0 x = (1 - e^2) \left(x + \frac{er_0}{1 - e^2}\right)^2 + y^2 - \frac{e^2 r_0^2}{1 - e^2}, \quad (3.39)$$

donc

$$(1 - e^2) \left(x + \frac{er_0}{1 - e^2}\right)^2 + y^2 = \frac{r_0^2}{1 - e^2}, \quad (3.40)$$

ce qui décrit une ellipse, ou une hyperbole, centrée en

$$x_c = \frac{-er_0}{1-e^2}, \quad (3.41)$$

$$y_c = 0. \quad (3.42)$$

Dans le cas d'une ellipse, on peut lire ses dimensions dans l'expression (3.40) en prenant $x = 0$ ou $y = 0$. On trouve pour les demi-axes

$$a = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2} = \frac{r_0}{1-e^2}, \quad (3.43)$$

$$b = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} = \frac{r_0}{\sqrt{1-e^2}}. \quad (3.44)$$

Notons que le demi grand axe a est facile à obtenir à partir de l'expression polaire :

$$2a = r(0) + r(\pi) = \frac{r_0}{1+e} + \frac{r_0}{1-e} = \frac{2r_0}{1-e^2}. \quad (3.45)$$

3.3.2 Troisième loi de Kepler

On peut en déduire l'aire de l'ellipse des demi-axes (3.43, 3.44) :

$$A = \pi ab = \frac{\pi r_0^2}{(1-e^2)^{3/2}}. \quad (3.46)$$

En combinant les équations (3.10, 3.19, 3.20), on voit que l'aire balayée pendant un temps Δt est $C\Delta t/2$; on peut donc déduire la période T de l'aire :

$$A = \frac{\pi r_0^2}{(1-e^2)^{3/2}} = \frac{CT}{2}. \quad (3.47)$$

En utilisant la relation (3.31), on arrive à

$$T = \frac{2\pi C^3}{G^2 M^2 (1-e^2)^{3/2}}. \quad (3.48)$$

Avec l'expression (3.43) pour le demi grand axe, on peut tester la troisième loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 C^6}{G^4 M^4 (1-e^2)^3} \times \frac{G^3 M^3 (1-e^2)^3}{C^6} = \frac{4\pi^2}{GM}, \quad (3.49)$$

ce qui est bien la relation trouvée pour les trajectoires circulaires (équation (3.15)).

3.3.3 Exemples

Donnons les caractéristiques de quelques orbites courantes.

Terre. La trajectoire de la Terre autour du Soleil est une ellipse d'excentricité $e \simeq 0,017$ et de demi grand axe $a \simeq 150 \times 10^6 \text{ km} \simeq 1 \text{ ua}$, où 1 ua est une unité astronomique.

Une orbite étant caractérisée par deux paramètres, on peut tout calculer à partir du demi grand axe et de l'excentricité. On a notamment

$$r_0 = a(1-e^2) \simeq 150 \times 10^6 \text{ km}, \quad (3.50)$$

d'où l'on peut déduire l'écart entre l'aphélie et le périhélie,

$$r_{\max} - r_{\min} = \frac{r_0}{1-e} - \frac{r_0}{1+e} = \frac{2er_0}{1-e^2} \simeq 5 \times 10^6 \text{ km.} \quad (3.51)$$

On peut aussi calculer la constante des aires,

$$C = \sqrt{GM r_0} \simeq 4,5 \times 10^{15} \text{ m}^2/\text{s}. \quad (3.52)$$

La constante des aires est définie par $C = r^2 \dot{\theta}$. Au périhélie, la vitesse est donnée par $v = r \dot{\theta}$, donc

$$v_{\text{périhélie}} = \frac{C}{r_{\min}} = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}(1+e) \simeq 30 \text{ km/s}. \quad (3.53)$$

On peut finalement vérifier sa période :

$$T = \frac{2\pi C^3}{G^2 M^2 (1-e^2)^{3/2}} \simeq 3,2 \times 10^7 \text{ s} \simeq 1 \text{ a.} \quad (3.54)$$

Lune. La trajectoire de la Lune autour de la Terre est aussi une ellipse de faible excentricité $e \simeq 0,055$, et son demi-grand axe est $a \simeq 384 \times 10^3 \text{ km}$. On en déduit

$$r_0 = a(1-e^2) \simeq 383 \times 10^3 \text{ km}, \quad (3.55)$$

$$v_{\text{périgée}} = \frac{C}{r_{\min}} = \sqrt{\frac{GM_{\text{Terre}}}{r_0}}(1+e) \simeq 1,0 \text{ km/s}, \quad (3.56)$$

$$T = \frac{2\pi C^3}{G^2 M^2 (1-e^2)^{3/2}} \simeq 2,6 \times 10^6 \text{ s} \simeq 27 \text{ j.} \quad (3.57)$$

Comète de Halley. La comète de Halley est un objet céleste de 11 km de diamètre qui a été observé plus de 600 ans avant notre ère en Chine. En 1705, Edmond Halley postula que les comètes observées en 1531, 1607 et 1682 étaient une seule et même comète, dont la période était de 76 ans, et prédit qu'elle reviendrait en 1758 ; ce qu'elle fit.

Son orbite autour du Soleil est une ellipse de demi grand axe $a \simeq 18 \text{ ua}$ et d'excentricité très proche de 1, $e \simeq 0,967$. On en déduit

$$r_0 = a(1-e^2) \simeq 1,2 \text{ ua}, \quad (3.58)$$

$$r_{\min} \simeq 0,6 \text{ ua}, \quad (3.59)$$

$$r_{\max} \simeq 35 \text{ ua}, \quad (3.60)$$

$$v_{\text{périhélie}} = \frac{C}{r_{\min}} = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}(1+e) \simeq 54,0 \text{ km/s}, \quad (3.61)$$

$$v_{\text{aphélie}} = \frac{C}{r_{\max}} = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}(1-e) \simeq 910 \text{ m/s}, \quad (3.62)$$

$$T = \frac{2\pi C^3}{G^2 M^2 (1-e^2)^{3/2}} \simeq 76 \text{ a.} \quad (3.63)$$

Son dernier périhélie date du 9 février 1986 et son prochain aura lieu le 28 juillet 2061.

3.4 Énergies

3.4.1 Définition des énergies

L'énergie cinétique est toujours donnée par

$$E_c = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2). \quad (3.64)$$

En utilisant la première formule de Binet (équation (3.24)), on peut réexprimer l'énergie cinétique comme

$$E_c = \frac{mC^2}{2} \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right]. \quad (3.65)$$

Pour déterminer l'énergie potentielle, rappelons la forme de l'attraction gravitationnelle (équation (3.2)) :

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{u}_r. \quad (3.66)$$

La force étant selon $\vec{u}_r$, l'énergie potentielle qui y est éventuellement associée ne doit dépendre que de la distance à l'origine, et on la note $E_p(r)$. Son gradient est alors

$$\overrightarrow{\text{grad}} E_p = E'_p(r)\vec{u}_r. \quad (3.67)$$

Comparons cette expression avec l'attraction gravitationnelle (3.66) :

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{u}_r = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p = -E'_p(r)\vec{u}_r, \quad (3.68)$$

d'où on obtient une équation pour $E_p(r)$:

$$E'_p(r) = \frac{GMm}{r^2}, \quad (3.69)$$

qui peut s'intégrer en

$$E_p(r) = -\frac{GMm}{r}. \quad (3.70)$$

On a choisi la constante d'intégration pour que l'énergie tende vers zéro à l'infini. L'attraction gravitationnelle est donc conservative. Avec la variable $u = 1/r$, l'énergie potentielle s'écrit donc

$$E_p = -GMmu. \quad (3.71)$$

L'énergie mécanique est

$$E_m = E_c + E_p = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GMm}{r} \quad (3.72)$$

$$= \frac{mC^2}{2} \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right] - GMmu. \quad (3.73)$$

Comme la seule force est décrite par son énergie potentielle, l'énergie mécanique est conservée.

3.4.2 Discussion qualitative des comportements

L'énergie cinétique a toujours la même forme, mais l'énergie potentielle (3.70) n'a pas la même forme que celle de l'oscillateur harmonique. En particulier, elle n'est pas bornée inférieurement car elle tend vers $-\infty$ quand $r \rightarrow 0$. D'autre part, elle est toujours négative et tend vers zéro à l'infini. Pour cette raison, on distingue différents comportements selon le signe de l'énergie mécanique.

Si l'énergie mécanique est négative, $E_m < 0$, alors l'objet reste confiné :

$$0 \leq E_c = E_m - E_p = E_m + \frac{GMm}{r}. \quad (3.74)$$

On a donc

$$\frac{GMm}{r} \geq -E_m, \quad (3.75)$$

d'où

$$r \leq r_{\text{sup}} = -\frac{GMm}{E_m}. \quad (3.76)$$

Dans ce cas, l'orbite de l'objet est fermée, il doit s'agir d'une ellipse. Notons que la borne supérieure (3.76) n'est pas atteinte, car alors l'objet y aurait une vitesse nulle, puis il tomberait tout droit sur le soleil ; on a donc $r_{\text{sup}} > r_{\text{max}}$.

Si l'énergie est strictement positive, $E_m > 0$, alors l'objet peut s'éloigner à l'infini, sa trajectoire est "ouverte" et il n'est pas lié au système solaire. Sa trajectoire est donc une hyperbole ou une parabole. À l'infini, son énergie potentielle est nulle et la norme de sa vitesse est donnée par son énergie mécanique : $E_m = E_c = mv^2/2$, soit $v = \sqrt{2E_m/m}$. Comme il ne ressent aucune force à l'infini, il se déplace en ligne droite et sa trajectoire est une hyperbole.

Les trajectoires paraboliques correspondent au cas marginal $E_m = 0$. L'objet n'est pas lié au système solaire mais sa vitesse à l'infini est nulle.

Remarque 3.3. L'analyse faite ici s'applique dès que l'énergie potentielle est négative et tend vers zéro à l'infini. On peut alors distinguer les trajectoires bornées ou les trajectoires qui peuvent aller à l'infini. En particulier, l'énergie des électrons dans le potentiel créé par un noyau a la même forme ; on parle alors d'états *liés* et *libres* pour une "énergie" respectivement négative et positive.

L'analyse énergétique nous permet de déterminer la *vitesse de libération* v_0 , qui est la vitesse qu'il faut donner à un objet à la surface d'une planète pour qu'il soit capable de quitter son attraction. C'est la vitesse à laquelle il faut jeter un caillou en l'air pour qu'il ne retombe pas, une fois les frottements négligés. Si r_0 est le rayon de l'astre qu'il faut quitter et M_0 sa masse, elle est définie par

$$E_m = \frac{m}{2}v_0^2 - \frac{GM_0m}{r_0} = 0, \quad (3.77)$$

donc

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM_0}{r_0}}. \quad (3.78)$$

Pour la Terre, $r_0 \simeq 6400$ km, donc

$$v_{0,\text{Terre}} \simeq 11 \text{ km/s}. \quad (3.79)$$

Sur la Lune, $M_0 \simeq 7,4 \times 10^{22}$ kg et $r_0 \simeq 1700$ km, donc

$$v_{0,\text{Lune}} \simeq 2,4 \text{ km/s}. \quad (3.80)$$

3.4.3 Énergie mécanique pour une trajectoire

Calculons maintenant l'énergie mécanique associée à une trajectoire décrite par l'équation (3.32), que l'on écrit ici pour la variable $u = 1/r$:

$$u(\theta) = \frac{1 + e \cos(\theta)}{r_0}, \quad (3.81)$$

où le rayon r_0 est lié à la constante des aires C par

$$r_0 = \frac{C^2}{GM}. \quad (3.82)$$

On peut donc calculer la dérivée

$$\frac{du}{d\theta}(\theta) = -\frac{e}{r_0} \sin(\theta). \quad (3.83)$$

Utilisons maintenant l'expression de l'énergie mécanique à partir des formules de Binet (équation (3.73)) et de la variable $u(\theta)$:

$$E_m = \frac{mC^2}{2} \left[\left(-\frac{e}{r_0} \sin(\theta) \right)^2 + \left(\frac{1 + e \cos(\theta)}{r_0} \right)^2 \right] - GMm \left(\frac{1 + e \cos(\theta)}{r_0} \right) \quad (3.84)$$

$$= \frac{GMm}{2r_0} \left[e^2 \sin^2(\theta) + (1 + e \cos(\theta))^2 \right] - \frac{GMm}{r_0} [1 + e \cos(\theta)] \quad (3.85)$$

$$= \frac{GMm}{r_0} \left[\frac{1 + e^2 + 2e \cos(\theta)}{2} - (1 + e \cos(\theta)) \right] \quad (3.86)$$

$$= \frac{GMm}{2r_0} (e^2 - 1). \quad (3.87)$$

On retrouve la classification obtenue à la section précédente : les ellipses ($|e| < 1$) ont une énergie mécanique strictement négative, les hyperboles ($|e| > 1$) une énergie mécanique strictement positive, et les paraboles ($|e| = 1$) une énergie mécanique nulle.

À partir de l'énergie mécanique (3.87) pour une trajectoire, on peut calculer la borne supérieure de la distance (3.76) :

$$r_{\text{sup}} = -\frac{GMm}{E_m} = \frac{2r_0}{1 - e^2}. \quad (3.88)$$

On peut ensuite comparer cette borne à la distance maximale,

$$\frac{r_{\text{sup}}}{r_{\text{max}}} = \frac{2}{1 + e}. \quad (3.89)$$

La borne supérieure est égale au double du rayon pour une trajectoire circulaire, alors qu'elle est presque atteinte quand l'excentricité est proche de 1, comme pour la comète de Halley.

Chapitre 4

Systèmes de points matériels

Nous n'avons jusque là étudié que le mouvement de points matériels uniques. Cette approche ne permet pas de comprendre le mouvement de solides quand la rotation est importante, comme pour une toupie, ou de plusieurs objets, comme le cas de la collision de boules de billard. Dans ce chapitre, nous introduisons les outils nécessaires pour étudier ces systèmes.

4.1 Centre de masse

Au chapitre précédent, nous avons notamment étudié le mouvement des planètes du système solaire. Bien sûr, les planètes ne sont pas ponctuelles ; qu'avons-nous alors réellement étudié ? Pour un objet à peu près sphérique, la réponse naturelle est que nous avons en fait étudié le mouvement du centre de la sphère. Mais qu'en est-il pour un objet qui n'est pas sphérique, comme par exemple la comète de Halley ? Dans cette section, nous allons définir le *centre de masse d'un système de points*, solide ou pas, et nous allons étudier son mouvement.

4.1.1 Définition

Commençons par la définition de solide, ou *corps rigide* : c'est un corps dont la distance entre deux points quelconques ne varie pas au cours du temps. Il est facile de voir que quand on déforme un objet, comme une tige que l'on plie, la distance entre des points de cet objet varie.

Considérons maintenant un système de points, rigide ou pas. Son centre de masse est la position moyenne de la masse. Voyons maintenant comment le définir précisément.

Considérons un système de N points matériels M_i de masses m_i pour $i = 1, 2, \dots, N$; on note aussi $\vec{r}_i = \overrightarrow{OM_i}$ la position du point i . Restreignons-nous dans un premier temps au cas où tous les points ont la même masse, $m_i = m$. La position de centre de masse G , $\vec{R} = \overrightarrow{OG}$, est la moyenne des positions :

$$\vec{R} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{r}_i. \quad (4.1)$$

Exemple 4.1. Plaçons-nous sur la droite $(O, \vec{i})$ et considérons les deux points de coordonnées $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ et de même masse. D'après la définition (4.1), la position x_G du centre de masse est

$$x_G = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2}. \quad (4.2)$$

Exemple 4.2. Plaçons-nous dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et considérons les trois points de positions $\vec{r}_1 = (0,0)$, $\vec{r}_2 = (1,0)$ et $\vec{r}_3 = (0,1)$. La position du centre de masse est alors

$$\vec{R} = \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Si les objets n'ont pas la même masse, la position du centre de masse n'est pas donnée par la moyenne "géométrique" (4.1). Par exemple, dans le plan $(O, \vec{i})$, si un point de masse $m_1 = 9$ kg est à la position $x_1 = 0$ et un point de masse $m_2 = 1$ kg est à la position $x_2 = 1$, le centre de masse est plus proche du point 1 que du point 2. Pour le calculer, on peut remplacer le point 1 par 9 points matériels de masse $m = 1$ kg situés en $x = 0$. Le système est alors constitué de 10 points de même masse et on peut calculer son centre de masse en utilisant la définition (4.1) :

$$x_G = \frac{1}{10}(9 \times 0 + 1) = \frac{1}{10}. \quad (4.4)$$

On trouve bien un centre de masse plus proche du point de 9 kg.

L'expression (4.4) peut être comprise de la façon suivante : le dénominateur est la masse totale du système, et la somme fait intervenir le produit de la position d'un point par sa masse. En la généralisant, on obtient une définition du centre de masse comme la moyenne des positions pondérée par la masse :

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i, \quad (4.5)$$

où

$$M = \sum_i m_i \quad (4.6)$$

est la masse totale.

Exemple 4.3. Reprenons l'exemple 4.2, mais en doublant la masse du point 1, $m_1 = 2$ kg. La position du centre de masse est alors

$$\vec{R} = \frac{1}{4} \left[2 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Enfin, les définitions (4.5, 4.6) peuvent être généralisées au cas d'une distribution de masse continue. Dans ce cas, on note $\rho(\vec{r})$ la densité de masse à la position $\vec{r}$. La masse totale est alors

$$M = \int \rho(\vec{r}) d\vec{r}, \quad (4.8)$$

où l'intégrale peut être simple (dx), double ($dx dy$) ou triple ($dx dy dz$) suivant la dimension du problème. La position du centre de masse est donnée par

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int \rho(\vec{r}) \vec{r} d\vec{r}. \quad (4.9)$$

Dans la suite, nous nous restreindrons à des distributions discrètes, c'est à dire à des ensembles de points matériels. Notons toutefois qu'une distribution continue peut être approximée par un ensemble de points matériels.

Exemple 4.4. Considérons une tige de longueur $L = 1$ m dont la densité est donnée par

$$\rho(x) = ax + b, \quad (4.10)$$

pour $0 \leq x \leq L = 1$, avec a et b deux constantes positives. La masse totale de la tige est alors donnée par

$$M = \int_0^1 \rho(x) dx = \int_0^1 (ax + b) dx = \frac{a}{2} + b. \quad (4.11)$$

La position de son centre de masse est

$$x_G = \frac{1}{M} \int_0^1 \rho(x)x dx = \frac{1}{\frac{a}{2} + b} \int_0^1 (ax + b)x dx = \frac{2}{a + 2b} \times \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2} \right) = \frac{2a + 3b}{3(a + 2b)}. \quad (4.12)$$

Si la masse est distribuée uniformément, $a = 0$ et $x_G = 1/2$: le centre de masse est bien au milieu de la tige. En revanche, si $a \neq 0$ et $b = 0$, $x_G = 2/3$: le centre de masse est déplacé vers le côté le plus lourd.

4.1.2 Dynamique du centre de masse

On considère cette fois que les N points matériels ont une position $\vec{r}_i(t)$ dépendante du temps. La position $\vec{R}(t)$ du centre de masse, qui est définie par l'équation (4.5) dépend aussi du temps ; on suppose pour le moment que les masses ne dépendent pas du temps.

La vitesse du centre de masse G est donnée par

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{R}(t)}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i(t)}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{v}_i(t) = \frac{1}{M} \sum_i \vec{p}_i(t), \quad (4.13)$$

où $\vec{p}_i(t) = m_i \vec{v}_i(t)$ est la quantité de mouvement du point i . On peut aussi calculer la quantité de mouvement du centre de masse en multipliant sa vitesse par la masse totale :

$$\vec{P}(t) = M\vec{V}(t) = \sum_i \vec{p}_i(t). \quad (4.14)$$

La quantité de mouvement du centre de masse est donc égale à la somme des quantités de mouvement.

L'accélération du centre de masse s'obtient simplement en dérivant une fois de plus :

$$\vec{A}(t) = \frac{d^2\vec{R}(t)}{dt^2} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{a}_i(t). \quad (4.15)$$

Appliquons maintenant le Principe Fondamental de la Dynamique au point matériel i :

$$m_i \vec{a}_i(t) = \vec{F}_i, \quad (4.16)$$

où $\vec{F}_i$ est la force à laquelle est soumis le point i . Cette force peut soit être due aux autres points matériels, on parle alors de force *interne* au système, soit être due à un élément extérieur au système, on parle alors de force *externe*. Si des forces interne et externe sont présentes, on peut décomposer

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{i,\text{int}} + \vec{F}_{i,\text{ext}}. \quad (4.17)$$

On peut de plus décomposer la force interne sur les autres points matériels :

$$\vec{F}_{i,\text{int}} = \sum_j \vec{F}_{j \rightarrow i}, \quad (4.18)$$

où $\vec{F}_{j \rightarrow i}$ désigne la force sur le point i due au point j . D'après la troisième loi de Newton, cette force est opposée à la force sur le point j due au point i :

$$\vec{F}_{i \rightarrow j} = -\vec{F}_{j \rightarrow i}. \quad (4.19)$$

Avec ces définitions, écrivons la dynamique du centre de masse :

$$M\vec{A} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i m_i \vec{a}_i \quad (4.20)$$

$$= \sum_i \left(\vec{F}_{i,\text{int}} + \vec{F}_{i,\text{ext}} \right) \quad (4.21)$$

$$= \sum_i \left(\sum_j \vec{F}_{j \rightarrow i} + \vec{F}_{i,\text{ext}} \right) \quad (4.22)$$

$$= \sum_i \vec{F}_{i,\text{ext}} + \sum_{i,j} \left(\vec{F}_{j \rightarrow i} + \vec{F}_{i \rightarrow j} \right) \quad (4.23)$$

$$= \vec{F}_{\text{ext}}. \quad (4.24)$$

Dans l'équation (4.23), la deuxième somme désigne une somme sur les paires de points, de sorte que chaque paire n'intervienne qu'une fois. Nous avons ensuite utilisé la troisième loi de Newton (4.19) pour montrer que les forces internes se compensent et n'affectent pas la dynamique du centre de masse. Il ne reste plus que la force externe totale

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \sum_i \vec{F}_{i,\text{ext}}. \quad (4.25)$$

On en conclut que la deuxième loi de Newton s'applique au centre de masse :

$$M\vec{A} = \vec{F}_{\text{ext}}. \quad (4.26)$$

Remarque 4.1. Dans le chapitre précédent, nous avons étudié le mouvement de la Terre autour du Soleil. Si on considère ce système isolé, d'après ce que nous venons de voir, sa quantité de mouvement doit être conservée. Si la Terre tourne autour du Soleil immobile, ce n'est pas le cas. Pour que la quantité de mouvement soit conservée, il faut en fait que le Soleil bouge un peu.

Exemple 4.5. En physique nucléaire, des noyaux atomiques peuvent se désintégrer en deux noyaux, et deux noyaux peuvent fusionner en un seul. Dans les deux cas, la quantité de mouvement est conservée au cours du processus. Par exemple, si un noyau immobile se désintègre, les deux noyaux issus de la désintégration ont des quantités de mouvement opposées. Si leurs masses sont différentes, leurs vitesses sont différentes, mais toujours dans des directions opposées.

4.2 Collisions

4.2.1 Définitions et lois générales

Une *collision* est un échange de quantité de mouvement entre deux objets. C'est une interaction à durée finie : on peut distinguer un « avant » et un « après », où les objets ont des vitesses constantes. On parle en général de *choc* quand l'interaction est instantanée ; c'est une bonne approximation pour les collisions entre des boules de pétanque ou de billard, par exemple. On peut aussi parler de collision quand un objet non lié à un astre le contourne sur une trajectoire hyperbolique ; dans ce cas, l'interaction n'est pas instantanée mais on peut identifier un avant et un après.

Notons $\vec{v}_{j,i}$ et $\vec{v}_{j,f}$ les vitesses initiale et finale du point j , avec $j \in \{1,2\}$. La conservation de la quantité de mouvement impose

$$m_1\vec{v}_{1,i} + m_2\vec{v}_{2,i} = m_1\vec{v}_{1,f} + m_2\vec{v}_{2,f}. \quad (4.27)$$

On distingue les chocs *élastiques*, lors desquels l'énergie est conservée, et les chocs *inélastiques*, lors desquels de l'énergie est dissipée sous forme de chaleur, déformation, ou rupture. Avant et après le choc, on peut oublier l'énergie potentielle d'interaction ; un choc élastique doit conserver l'énergie cinétique, c'est à dire :

$$m_1v_{1,i}^2 + m_2v_{2,i}^2 = m_1v_{1,f}^2 + m_2v_{2,f}^2. \quad (4.28)$$

En règle générale, déterminer l'état final requiert de déterminer $2d$ inconnues, où d est la dimension du problème, c'est à dire les d composantes de chaque vecteur vitesse. La conservation de la quantité de mouvement (4.27) donne d équations, et, si la collision est élastique, la conservation de l'énergie cinétiques (4.28) donne une équation supplémentaire. Il y a donc au mieux $d + 1$ équations pour $2d$ inconnues, on ne peut donc calculer l'état final qu'en dimension $d = 1$.

Notons enfin que ce système d'équations admet toujours la solution « triviale » où les vitesses sont inchangées après la collision.

4.2.2 Impact sur un objet immobile

On considère ici le cas particulier où le point 2 est immobile dans l'état initial, $\vec{v}_{2,i} = \vec{0}$. C'est la situation rencontrée au billard ou à la pétanque. Cela ne change pas la difficulté du problème mais les expressions sont plus simples.

Solution complète en dimension 1. En dimension $d = 1$, on peut résoudre exactement le cas de la collision élastique. Les équations pour $v_{1,f}$ et $v_{2,f}$ sont

$$m_1v_{1,f} + m_2v_{2,f} = m_1v_{1,i}, \quad (4.29)$$

$$m_1v_{1,f}^2 + m_2v_{2,f}^2 = m_1v_{1,i}^2. \quad (4.30)$$

On peut simplifier les équations en introduisant le rapport des masses,

$$\mu = m_2/m_1, \quad (4.31)$$

on a alors

$$v_{1,f} + \mu v_{2,f} = v_{1,i}, \quad (4.32)$$

$$v_{1,f}^2 + \mu v_{2,f}^2 = v_{1,i}^2. \quad (4.33)$$

On peut éliminer $v_{1,f}$ avec la première équation :

$$v_{1,f} = v_{1,i} - \mu v_{2,f}. \quad (4.34)$$

En injectant cette expression dans la conservation de l'énergie cinétique, on obtient

$$(v_{1,i} - \mu v_{2,f})^2 + \mu v_{2,f}^2 = v_{1,i}^2. \quad (4.35)$$

Après développement, simplification, et élimination de la solution triviale, on arrive à

$$v_{1,f} = \frac{1 - \mu}{1 + \mu} v_{1,i}, \quad (4.36)$$

$$v_{2,f} = \frac{2}{1 + \mu} v_{1,i}. \quad (4.37)$$

Deux cas limites sont intéressants à considérer :

- Si les deux objets sont de même masse, $\mu = 1$, et dans ce cas l'objet 1 transmet toute sa quantité de mouvement à l'objet 2 et se retrouve immobile. À la pétanque, cela correspond à un « carreau ».
- Si l'objet 2 est infiniment lourd (c'est un mur), $\mu = \infty$, l'objet 1 « rebondit » et l'objet 2 reste immobile.

Objets de même masse en dimension $d > 1$. Commençons par une remarque générale : en éliminant $\vec{v}_{1,f}$ avec la conservation de la quantité de mouvement (4.27), la conservation de l'énergie donne

$$(\vec{v}_{1,i} - \mu\vec{v}_{2,f})^2 + \mu v_{2,f}^2 = v_{1,i}^2. \quad (4.38)$$

En développant le carré, les termes $v_{1,i}^2$ se simplifient et il reste

$$\mu(1 + \mu)v_{2,f}^2 - 2\mu\vec{v}_{1,i} \cdot \vec{v}_{2,f} = 0. \quad (4.39)$$

On peut tout diviser par $\mu(1 + \mu)$,

$$0 = v_{2,f}^2 - \frac{2}{1 + \mu}\vec{v}_{1,i} \cdot \vec{v}_{2,f} = \left(\vec{v}_{2,f} - \frac{1}{1 + \mu}\vec{v}_{1,i}\right)^2 - \frac{v_{1,i}^2}{(1 + \mu)^2}. \quad (4.40)$$

Cela signifie que le vecteur $\vec{v}_{2,f}$ appartient à un cercle (si $d = 2$) ou à une sphère (si $d = 3$) de centre $\vec{v}_{1,i}/(1 + \mu)$ et de rayon $v_{1,i}/(1 + \mu)$, c'est à dire qui contient l'origine, qui correspond à la solution triviale.

On peut aussi calculer le produit scalaire entre les vitesses après la collision. Prenons le produit scalaire entre $\vec{v}_{2,f}$ et la relation $\vec{v}_{1,f} = \vec{v}_{1,i} - \mu\vec{v}_{2,f}$:

$$\vec{v}_{1,f} \cdot \vec{v}_{2,f} = \vec{v}_{1,i} \cdot \vec{v}_{2,f} - \mu v_{2,f}^2. \quad (4.41)$$

En utilisant la relation (4.39), on obtient

$$\vec{v}_{1,f} \cdot \vec{v}_{2,f} = \left(\frac{1 + \mu}{2} - \mu\right) v_{2,f}^2 = \frac{1 - \mu}{2} v_{2,f}^2. \quad (4.42)$$

En particulier, si les objets sont de même masse, $\mu = 1$, les vitesses finales sont orthogonales. Cela devrait pouvoir être observé au billard.

4.3 Composition des mouvements

On peut se demander comment les lois physiques, comme le Principe Fondamental de la Dynamique, sont modifiées quand on passe d'un référentiel à un autre, par exemple quand on est dans un train en marche ou sur un manège. De manière général, on suppose que les lois s'appliquent dans un référentiel $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, et on se demande ce qu'elles deviennent dans le nouveau référentiel en mouvement $\mathcal{R}' = (O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$.

Nous allons ici nous restreindre au cas de la translation uniforme (le train) et au cas de la rotation uniforme (le manège).

4.3.1 Référentiel en translation uniforme

Considérons un point matériel M . Sa position dans le référentiel de départ $\mathcal{R}$ est

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM}. \quad (4.43)$$

Sa position dans le référentiel $\mathcal{R}'$ est

$$\vec{r}' = \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O'O} + \vec{r}. \quad (4.44)$$

C'est la loi de composition des positions.

Si le référentiel $\mathcal{R}'$ est en translation uniforme par rapport au référentiel $\mathcal{R}$, cela signifie que

$$\overrightarrow{OO'} = -\overrightarrow{O'O} = \vec{V}t. \quad (4.45)$$

D'autre part, on a $\vec{i} = \vec{i}'$, $\vec{j} = \vec{j}'$ et $\vec{k} = \vec{k}'$. On a donc

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) - \vec{V}t. \quad (4.46)$$

Avec la position dans le référentiel $\mathcal{R}'$, nous pouvons calculer la vitesse et l'accélération de l'objet :

$$\vec{v}'(t) = \vec{v}(t) - \vec{V}, \quad (4.47)$$

$$\vec{a}'(t) = \vec{a}(t). \quad (4.48)$$

En particulier, si le point est soumis à une somme des forces $\vec{F}$, le Principe Fondamental de la Dynamique dans le référentiel $\mathcal{R}$ donne $m\vec{a} = \vec{F}$ et, par la loi de composition des accélérations (4.48), $m\vec{a}' = \vec{F}$, c'est à dire que le PFD est préservé dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

Exemple de la fusée. Une fusée se propulse en éjectant des gaz à grande vitesse. Calculons l'accélération produite par l'éjection d'une masse δm de gaz à une vitesse u pendant un temps δt . On note $v(t)$ la vitesse de la fusée et $m(t)$ sa masse. On considère que le mouvement est unidimensionnel.

Utilisons la variation de la quantité de mouvement du système fusée et gaz entre t et $t + \delta t$. Au temps t , la quantité de mouvement est $P(t) = m(t)v(t)$. Au temps $t + \delta t$, la masse de la fusée est $m + \delta m$, avec $\delta m < 0$, et sa vitesse $v = v + \delta v$. Les gaz éjectés ont une masse $-\delta m$ et une vitesse u , avec $u < 0$, dans le référentiel de la fusée (ils sont éjectés vers le bas) ; leur vitesse dans le référentiel de la Terre est donc $v + u$ d'après la loi de composition des vitesses (4.47). La variation de la quantité de mouvement s'écrit donc

$$P(t + \delta t) - P(t) = (m + \delta m)(v + \delta v) - \delta m(v + u) - mv \quad (4.49)$$

$$= m\delta v - u\delta m. \quad (4.50)$$

Nous avons négligé le terme $\delta m\delta v$ qui est « doublement petit ». En divisant par δt et en prenant la limite $\delta t \rightarrow 0$, on obtient

$$\frac{dP}{dt} = ma - u\dot{m}. \quad (4.51)$$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique, si on note $\vec{F}$ les forces externes, qui comprennent le poids et les frottements, on a

$$\frac{dP}{dt} = F = ma - u\dot{m}, \quad (4.52)$$

qui permet d'obtenir l'accélération de la fusée :

$$ma = F + u\dot{m}. \quad (4.53)$$

Le deuxième terme est la *poussée*.

4.3.2 Référentiel en rotation uniforme

On suppose ici que le référentiel $\mathcal{R}'$ est simplement en rotation uniforme, sans translation, par rapport au référentiel $\mathcal{R}$. Cela signifie que $O' = O$ et que les vecteurs de base $\vec{e}'_i(t)$ sont en rotation selon le vecteur $\vec{\Omega}$; leur dérivée temporelle vaut donc

$$\frac{d\vec{e}'_i(t)}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}'_i(t). \quad (4.54)$$

Considérons maintenant un point M , dont on peut écrire la position $\vec{r}$ dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$:

$$\vec{r}(t) = \sum_i x_i(t) \vec{e}_i = \sum_i x'_i(t) \vec{e}'_i(t). \quad (4.55)$$

Calculons la vitesse de ce point avec ses coordonnées dans le référentiel $\mathcal{R}'$:

$$\vec{v}(t) = \sum_i \dot{x}'_i(t) \vec{e}'_i(t) + \sum_i x'_i(t) \frac{d\vec{e}'_i(t)}{dt} \quad (4.56)$$

$$= \vec{v}'(t) + \sum_i x'_i(t) \vec{\Omega} \wedge \vec{e}'_i(t) \quad (4.57)$$

$$= \vec{v}'(t) + \vec{\Omega} \wedge \vec{r}(t). \quad (4.58)$$

Le terme $\vec{v}'(t)$ est la *vitesse relative*, c'est à dire la vitesse qui serait mesurée dans le référentiel $\mathcal{R}'$. Le terme $\vec{\Omega} \wedge \vec{r}(t)$ est la *vitesse d'entraînement*, c'est à dire la vitesse qu'aurait le point dans $\mathcal{R}$ s'il était fixe dans $\mathcal{R}'$.

Dérivons une seconde fois pour obtenir la composition des accélérations :

$$\vec{a}(t) = \sum_i \left[\ddot{x}'_i(t) \vec{e}'_i(t) + 2\dot{x}'_i(t) \frac{d\vec{e}'_i(t)}{dt} + x'_i(t) \frac{d^2\vec{e}'_i(t)}{dt^2} \right] \quad (4.59)$$

$$= \vec{a}'(t) + \sum_i \left[2\dot{x}'_i(t) \vec{\Omega} \wedge \vec{e}'_i(t) + x'_i(t) \frac{d}{dt} (\vec{\Omega} \wedge \vec{e}'_i(t)) \right] \quad (4.60)$$

$$= \vec{a}'(t) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}'(t) + \vec{\Omega} \wedge [\vec{\Omega} \wedge \vec{r}(t)]. \quad (4.61)$$

Le premier terme est l'*accélération relative*, le troisième l'*accélération d'entraînement*, et le second l'*accélération de Coriolis*.

En conséquence de la composition des accélérations (4.61), le Principe Fondamental de la Dynamique ne s'applique pas directement dans le référentiel $\mathcal{R}'$. En multipliant la relation (4.61) par la masse et en appliquant le PFD dans le référentiel $\mathcal{R}$, on obtient

$$m\vec{a}'(t) = \vec{F} - 2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}'(t) - m\vec{\Omega} \wedge [\vec{\Omega} \wedge \vec{r}(t)]. \quad (4.62)$$

Les deuxième et troisième termes sont des « forces fictives », respectivement force de Coriolis et force d'entraînement, qu'il faut ajouter à la « vraie » force $\vec{F}$ pour obtenir l'accélération dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

Ces forces font qu'une balle lancée sur un manège ne décrit pas une trajectoire parabolique dans le référentiel du manège, et que la rotation de la Terre induise des tourbillons atmosphériques et des vents dominants d'est en ouest dans l'hémisphère nord (et inversement dans l'hémisphère sud).