ESPCI – Promotion 136
Mathématiques

Épreuve du mercredi 24 janvier 2019

Durée : 2h30

Documents autorisés : notes de cours, sujets de TD et notes de TD ; machines à calculer et téléphones portables interdits.

24 points au total, note ramenée sur 20.

1 Méthode des caractéristiques (5 pts)

On considère l'équation aux dérivées partielles pour la fonction u :

$$y\partial_x u(x,y) + x\partial_y u(x,y) = 0. \tag{1}$$

définie sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, |y| \leq x\}$.

Question 1 [1,5/2]: Déterminez l'équation des courbes caractéristiques $(\hat{x}(s), \hat{y}(s))$ le long desquelles la fonction u est constante. Montrez que $\hat{x}(s)^2 - \hat{y}(s)^2$ est constant le long d'une caractéristique.

Question 2 [0,2/1]: Tracez une famille de caractéristiques.

Question 3 [0,4/2]: Donnez la solution qui satisfait la condition $u(x,0) = f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. Il est possible, mais pas indispensable, de paramétrer les caractéristiques à l'aide des fonctions ch et sh.

2 Diffusion avec un bord absorbant (7 pts)

On considère une particule dont la position $X(t) \in \mathbb{R}_+$ diffuse, et la particule est absorbée quand elle atteint $x = 0$. On cherche la loi du temps T auquel elle touche le bord, en fonction de sa position de départ x_0. Sa densité de probabilité $p(x,t)$ obéit à l'équation de diffusion

$$\partial_t p(x,t) = \frac{1}{2}\partial_x^2 p(x,t), \tag{2}$$

à partir de la condition initiale

$$p(x,0) = \delta(x - x_0) \tag{3}$$

et satisfait les conditions aux limites

$$p(0,t) = 0, \tag{4}$$
$$p(x \to \infty, t) = 0. \tag{5}$$

La première condition représente le bord absorbant.

Question 4 [0,5/1]: Montrez que la solution à l'équation (2) avec les conditions (3) à (5) est unique.

Question 5 [0,1/1]: En utilisant la fonction de Green de l'équation de la chaleur, montrez que la solution est donnée par

$$p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left[\exp\left(-\frac{[x-x_0]^2}{2t}\right) - \exp\left(-\frac{[x+x_0]^2}{2t}\right)\right]. \tag{6}$$

La probabilité que la particule ait « survécu » jusqu'au temps t est donnée par

$$S(t) = \mathrm{P}(T \geq t) = \int_0^\infty p(x,t)\mathrm{d}x. \tag{7}$$

Question 6 [0,2/1]: Exprimez cette probabilité de survie comme une intégrale sur un intervalle borné, puis avec la fonction erreur, qui est définie par $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$.

Question 7 [0,1/2]: Déduisez la fonction de répartition de T puis sa loi, $f_T(t)$. Représentez graphiquement la loi $f_T(t)$.

Question 8 [0/2]: Que vaut l'espérance de T ? Auriez-vous pu prédire ce résultat à partir du comportement d'une marche alétoire avec deux bords absorbants ?

3 Trajectoire optimale sur la sphère (5 pts)

On cherche à relier deux points d'une sphère par le chemin le plus court restant sur la sphère. On utilise les coordonnées sphériques θ et ϕ pour la lattitude et la longitude, respectivement ; on utilise la convention que $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\theta = 0$ correspondant à l'équateur. On paramètre une trajectoire sur la sphère par une fonction $\theta(\phi)$.

Question 9 [0,6/1]: Montrez que pour trouver le chemin le plus court il faut minimiser la fonctionnelle

$$I[\theta] = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{\cos(\theta(\phi))^2 + \theta'(\phi)^2} \mathrm{d}\phi. \tag{8}$$

Question 10 [1,5/2]: Quel est le lagrangien associé à cette fonctionnelle ? Montrez qu'il existe une intégrale du mouvement et la déterminer.

Question 11 [0,4/1]: On pose $\theta = \arctan(\alpha)$, où α est une autre fonction de ϕ. On a donc $\theta' = \alpha'/(1+\alpha^2)$ et $\cos(\theta) = 1/\sqrt{1+\alpha^2}$. Montrez que

$$\alpha'(\phi)^2 + \alpha(\phi)^2 = A, \tag{9}$$

où A est une constante.

Question 12 [0,4/1]: En dérivant la relation (9), déterminez la forme de $\theta(\phi)$.

4 Durée de vie d'un circuit électronique (3 pts)

On considère un circuit électronique constitué de N composants. La durée de vie du composant n, X_n, est une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ_n ; les durées de vie des différents composants sont indépendantes. La durée de vie du circuit Y est égale au minimum des durées de vie des composants : $Y = \min_n(X_n)$.

Question 13 [0,3/1]: Quelle est l'espérance de la durée de vie du composant n, $t_n = \mathrm{E}(X_n)$ (faîtes le calcul) ?

Question 14 [0,7/2]: Montrez que la durée de vie du circuit est une variable aléatoire exponentielle et donnez son paramètre. Exprimez l'espérance de la durée de vie du circuit, $t_\mathrm{c} = \mathrm{E}(Y)$, en fonction des durées de vie des différents composants.

5 Nombre de photons détectés derrière un miroir semi-réfléchissant (4 pts)

Un laser envoie N photons sur un miroir réfléchissant, où N est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. À chaque photon n est associé une variable aléatoire de Bernouilli X_n valant 1 si le photon est transmis ($\mathrm{P}(X_n = 1) = p$) et 0 s'il est réfléchi par le miroir. Les photons sont indépendants les uns des autres. Le nombre de photons transmis est $T = \sum_{n=1}^{N} X_n$.

Question 15 [1,2/2]: Calculez la fonction caractéristique du nombre de photons envoyés, $G_N(s) = \mathrm{E}(s^N)$, et la fonction caractéristique de la variable X_n, $g(s) = \mathrm{E}(s^{X_n})$.

Question 16 [0,3/2]: Exprimez la fonction caractéristique du nombre de photons transmis $G_T(s)$ en fonction de $G_N(s)$ et $g(s)$. Quelle loi suit la variable aléatoire T ?

ESPCI – Promotion 137
Mathématiques

Épreuve du mercredi 19 décembre 2019

Durée : 2h

Documents autorisés : notes de cours, sujets de TD et notes de TD ; machines à calculer et téléphones portables interdits.

21 points au total, note ramenée sur 20.

1 Équation de Poisson sur un demi-espace (7 pts)

On considère l'équation de Poisson, $\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = 0$, sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$. On veut résoudre cette équation avec les conditions aux limites $u(x, y, 0) = U(x, y)$, $\lim_{z\to\infty} u(x, y, z) = 0$, où $U(x, y)$ est de moyenne spatiale nulle.

Question 1 [0,04/1]: Discutez l'unicité de la solution à ce problème.

Question 2 [0,74/1]: On introduit la transformée de Fourier de $u(x, y, z)$ par rapport aux variables x et y, $\tilde{u}(k_x, k_y, z)$. Exprimez $\tilde{u}(k_x, k_y, z)$ et $\tilde{u}(k_x, k_y, 0)$ avec la condition aux limites.

Question 3 [0,56/1]: Quelle équation vérifie $\tilde{u}(k_x, k_y, z)$?

Question 4 [0,7/2]: On introduit le vecteur $\boldsymbol{k} = (k_x, k_y)$ et on note sa norme $|\boldsymbol{k}| = k$. Montrez que la solution de l'équation peut s'écrire $\tilde{u}(\boldsymbol{k}, z) = f_z(k)\tilde{U}(\boldsymbol{k})$, où $\tilde{f}_z(k)$ est une fonction que vous exprimerez.

Question 5 [0,73/2]: La transformée de Fourier inverse de $\tilde{f}_z(k)$ est

$$f_z(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i(k_x x + k_y y)} \tilde{f}_z(\boldsymbol{k}) dk_x dk_y = \frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}. \tag{1}$$

Exprimez la solution $u(x, y, z)$ avec $f_z(x, y)$ et $U(x, y)$. Que doit valoir $\lim_{z\to 0} f_z(x, y)$?

2 Méthode des caractéristiques (5 pts)

On considère l'équation aux dérivées partielles pour la fonction u :

$$y\partial_x u(x, y) - 4x\partial_y u(x, y) = 0. \tag{2}$$

définie pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Question 6 [1,76/2]: Déterminez l'équation des courbes caractéristiques $(\hat{x}(s), \hat{y}(s))$ le long desquelles la fonction u est constante. Montrez que $4\hat{x}(s)^2 + \hat{y}(s)^2$ est constant le long d'une caractéristique.

Question 7 [0,58/1]: Tracez une famille de caractéristiques.

Question 8 [0,86/1]: Donnez (a) la solution qui satisfait $u(x, 0) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$ et (b) la solution qui satisfait $u(x, 0) = x^2 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

3 Trajectoire dans une fibre optique à gradient d'indice (5 pts)

On considère une fibre optique à gradient d'indice. On note z la coordonnée le long de l'axe de la fibre et x et y les coordonnées transverses. L'indice optique dans la fibre est donné par $n(r) = n_0 \left(1 - \frac{r^2}{2r_0^2}\right)$, où

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et n_0 et r_0 sont des paramètres de la fibre. On cherche à déterminer la trajectoire $y(z)$ d'un rayon lumineux dans le plan (y, z).

Question 9 [2,67/5]: Montrez que sous certaines approximations que vous déterminerez, la trajectoire du rayon lumineux est une sinusoïde dont vous déterminerez les paramètres.

4 Maximum de variables aléatoires uniformes (4 pts)

On considère des variables aléatoires uniformes sur l'intervalle $[0, 1]$ et indépendantes $(X_i)_{i \in \mathbb{N}_+^*}$. On pose $Y_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$.

Question 10 [2,15/4]: Déterminez l'espérance $\mathrm{E}[Y_n]$ et commentez le résultat obtenu.

ESPCI Paris PSL – Promotion 138 – Mathématiques

Épreuve du mercredi 15 décembre 2020

Durée : 2h

Documents autorisés : notes de cours ; machines à calculer et téléphones portables interdits.

23 points au total, note ramenée sur 20.

Commentaire global. Les copies sont souvent mal rédigées, les élèves les utilisent comme brouillon. Il faut chercher pour trouver la solution, et les élèves n'hésitent pas à mettre plusieurs réponses pour chaque question. Les calculs manquent souvent de rigueur : j'ai accordé des points à des calculs contenant des erreurs "typographiques".

1 Fonction de Green de ∇^4 (7 pts)

On cherche la fonction de Green de $\nabla^4 = \left(\nabla^2\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^d \partial_i^2\right)^2$ en dimension d'espace d, c'est à dire la solution de $\nabla^4 G_d = \delta$. On cherche la solution sous la forme d'une fonction isotrope $G_d(\boldsymbol{r}) = g_d(r)$, avec r la norme de $\boldsymbol{r}$. On utilisera les résultats du cours sur la fonction de Green de l'équation de Poisson, $\nabla^2 F_d = \delta$, et la méthode utilisée pour trouver ces fonctions de Green (on notera aussi $F_d(\boldsymbol{r}) = f_d(r)$).

Question 1 [1,2/2]: Reliez G_d à F_d. Écrivez cette relation pour les fonctions g_d et f_d.

Des élèves n'osent pas passer de $\nabla^4 G_d = \nabla^2 F_d$ à $\nabla^2 G_d = F_d$. Ensuite, beaucoup d'élèves passent de $\nabla^2 G_d = F_d$ à $g_d''(r) = f_d(r)$, ce qui simplifie beaucoup la suite.

Question 2 [0,7/2]: En utilisant les résultats du cours pour $f_d(r)$, déterminez $g_d(r)$ pour $d \notin \{2, 4\}$. Quelle est la difficulté pour la dimension $d = 4$?

Beaucoup d'élèves partent de la mauvaise équation et arrivent au (mauvais) résultat. Pas mal d'élèves ne cherchent pas $g_d(r)$ sous la force Ar^γ, et ceux qui le font ne cherchent pas tous la valeur de A. Enfin, beaucoup d'élèves regardent les cas particuliers $d = 1$ et $d = 3$.

Question 3 [0,2/1]: Déterminez $g_4(r)$.

Peu d'élèves ont cherché la solution sont forme de logarithme, beaucoup n'ont pas cherché la constante.

Question 4 [0,1/2]: Déterminez $g_2(r)$ (vous pourrez factoriser les termes en $g_2(r)$ et considérer $r \mapsto r^2 \log(r)$).

Très peu d'élèves sont allés au bout de ce calcul. Une élève a remarqué que $f_d(r)$ (déterminée en cours) était définie à une constante près pour simplifier le calcul ; c'est malin.

2 Méthode des caractéristiques (5 pts)

Soit l'équation aux dérivées partielles définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\partial_x u(x, y) + xy\partial_y u(x, y) = 0. \tag{1}$$

Question 5 [2,8/3]: En utilisant la méthode des caractéristiques, donner la solution générale de cette équation.

Les notations sont parfois peu claires, notamment quand on note $\hat{u} = u$. La forme générale n'est pas toujours donnée explicitement, on attend $u(x, y) = f(y\mathrm{e}^{-x^2/2})$.

Question 6 [1,5/2]: Quelles sont les solutions satisfaisant à chacune des conditions aux limites suivantes :

(i) $\forall y \in \mathbb{R}$, $u(0, y) = y^2$;

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x, 0) = x^2$?

La condition (i) est facile à analyser quand la forme générale a été donnée plus haut. Pour la condition (ii), la réponse, « il n'y a pas de solution » n'est pas toujours écrite explicitement.

3 Forme d'une poutre pesante encastrée (5 pts)

On considère une poutre de longueur L, de module de courbure B et de masse linéique ρ encastrée horizontalement dans un mur rigide. On cherche à déterminer la forme de la poutre. On note $y(x)$ sa hauteur à l'abscisse x. L'énergie de la poutre est donnée par

$$U[y] = \int_0^L \left[\frac{B}{2} y''(x)^2 + \rho g y(x)\right] \mathrm{d}x, \tag{2}$$

et l'encastrement impose $y(0) = y'(0) = 0$.

Question 7 [0,9/3]: Donnez l'équation différentielle satisfaite par la hauteur et les conditions aux limites.

Peu d'élèves voient qu'il faut « refaire » la démonstration des équations d'Euler-Lagrange, la plupart utilise les équations du cours comme si de rien n'était, ou généralise les équations du cours au petit bonheur la chance. Enfin, quand la bonne équation différentielle est obtenue, il manque souvent les conditions au bord. Certains élèves ajoutent une contrainte de longueur imposée qui rend le problème non-linéaire.

Question 8 [0,6/2]: Déterminez la forme de la poutre. Donnez $y(L)$.

Beaucoup d'élèves ne partent pas des bonnes équations, ou ne trouvent pas les bonnes conditions aux limites. Parfois, les conditions aux limites sont devinées sans que rien ne soit mentionné. Enfin, beaucoup de solutions de la forme $y(x) = Bx^3/(\rho g)$ (poutre qui monte, donc), souvent dessinées dans l'autre sens.

4 Maximum de variables aléatoires uniformes : convergence et tirage aléatoire (6 pts)

On considère des variables aléatoires uniformes sur l'intervalle $[0, 1]$ et indépendantes $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*_+}$. On pose $Y_n = \max_{1\leq i\leq n} X_i$.

Question 9 [2,1/3]: Déterminez la loi de Y_n.

Question globalement réussie. Les élèves ne donnent parfois aucune explication, ou écrivent des choses comme $\mathrm{P}[Y_n = x] \ldots$. Quelques élèves confondent fonction de répartition et densité, ce qui donne une VA tendant vers 0.

Question 10 [0,6/2]: Montrez que Y_n converge en moyenne vers une variable aléatoire certaine.

La majorité des élèves pense qu'il suffit de montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[Y_n] = 1$. Ceux qui utilisent la bonne définition ne traitent pas souvent la valeur absolue correctement.

Question 11 [0,2/1]: On peut générer numériquement des tirages de la variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$, que l'on note R. Quelle fonction g appliquer à R pour que $g(R)$ suive la loi de Y_n ? Tracez l'allure de la fonction g pour différentes valeurs de n et commentez-les.

Beaucoup d'élèves ne pensent pas à utiliser la relation du cours, puis beaucoup ne l'utilisent pas correctement (avec la densité par exemple). Enfin, les courbes ne sont pas toujours tracées correctement.

ESPCI Paris PSL – Promotion 139 – Mathématiques

Épreuve du lundi 13 décembre 2021

Durée : 2h

Documents autorisés : notes de cours ; machines à calculer et téléphones portables interdits.

22 points au total, note ramenée sur 20.

1 Diffusion d'un polluant émis pour $t > 0$ (7 pts)

On considère la concentration $u(\boldsymbol{r}, t)$ d'un polluant dans $\mathbb{R}^3$ en fonction du temps. Le polluant est émis en $\boldsymbol{r} = 0$ à partir de $t = 0$ avec un taux 1, et il diffuse avec un coefficient de diffusion D. La concentration $u(\boldsymbol{r}, t)$ vérifie donc

$$\partial_t u(\boldsymbol{r}, t) = D\nabla^2 u(\boldsymbol{r}, t) + H(t)\delta(\boldsymbol{r}), \tag{1}$$

avec la condition initiale $u(\boldsymbol{r}, 0) = 0$ pour tout $\boldsymbol{r}$.

Question 1 [0,55/1]: Montrez que la solution au problème ci-dessus est unique.

L'erreur la plus courante est de dire que la différence $v(\boldsymbol{r}, t)$ de deux solutions vérifie la même équation que $u(\boldsymbol{r}, t)$, au lieu de l'équation homogène ; les élèves doivent alors arnaquer pour dire que le terme source ne contribue pas, j'ai mis 0 dans ce cas. J'ai aussi pénalisé les erreurs de rigueur (arguments manquants) ou les simples références au cours, le plus souvent sans justifications suffisantes.

Question 2 [1,08/2]: Quelle est l'équation vérifiée par la concentration dans l'état stationnaire, $u_s(\boldsymbol{r}) = \lim_{t\to\infty} u(\boldsymbol{r}, t)$? Que vaut $u_s(\boldsymbol{r})$?

La plupart des élèves ont trouvé l'équation satisfaite par $u_s(\boldsymbol{r})$ (certains ont enlevé le terme source). Ensuite, beaucoup l'ont traitée comme une équation en dimension 1 et ont intégré deux fois pour arriver à $u_s(\boldsymbol{r}) \propto r$. Les élèves qui ont reconnu la fonction de Green de l'équation de Poisson ont parfois oublié le préfacteur. Quelques élèves ont essayé de retrouver la fonction de Green en prenant la transformée de Fourier.

Question 3 [0,30/2]: Quelle équation vérifie la quantité totale de polluant dans le milieu à l'instant t, $U(t) = \int u(\boldsymbol{r}, t)\mathrm{d}\boldsymbol{r}$? Que vaut $U(t)$? Que vaut $U_s = \int u_s(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}$? Dans quel sens peut-on dire que $u_s(\boldsymbol{r}) = \lim_{t\to\infty} u(\boldsymbol{r}, t)$?

Peu d'élèves ont trouvé l'équation satisfaite par $U(t)$, pour la plupart le terme $\int \nabla^2 u(\boldsymbol{r}, t)\mathrm{d}r$ est devenu $\nabla^2 U(t)$, ou $\nabla U(t)$, montrant que les élèves ne comprennent pas les objets qu'ils manipulent. Ensuite, peu d'élèves ont osé écrire $U_s = \infty$. Le sens de la converge (simple, mais pas en norme 1 par exemple) n'a jamais été discuté.

Question 4 [0,48/2]: Donnez la fonction de Green associée à ce problème, $G(\boldsymbol{r}, t)$. Utilisez-la pour écrire la solution $u(\boldsymbol{r}, t)$. Tracez l'allure de $u(\boldsymbol{r}, t)$ pour différentes valeurs de $r = |\boldsymbol{r}|$.

La plupart des élèves a trouvé la bonne fonction de Green. Peu ont ensuite écrit le produit de convolution correctement (avec la convolution en espace et en temps). Je n'ai trouvé une représentation graphique correcte que dans une copie.

2 Méthode des caractéristiques (5 pts)

On considère l'équation aux dérivées partielles pour la fonction u :

$$y\partial_x u(x, y) + x\partial_y u(x, y) = 0. \tag{2}$$

définie sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, |y| \leq x\}$.

Question 5 [1,81/2]: Déterminez l'équation satisfaite par les courbes caractéristiques $(\hat{x}(s), \hat{y}(s))$ le long desquelles la fonction u est constante. Montrez que $\hat{x}(s)^2 - \hat{y}(s)^2$ est constant le long d'une caractéristique.

J'ai pénalisé une notation peu rigoureuse, comme $\hat{x}'(s) = y$. Les notations des élèves dans cet exercices sont globalement peu rigoureuses, ce qui conduit à des expressions dont il faut deviner le sens.

Question 6 [0,35/1]: Tracez une famille de caractéristiques.

Beaucoup d'hyperboles mal orientées, mal tracées, souvent une seule alors qu'une famille est demandée.

Question 7 [1,32/2]: Donnez la solution qui satisfait la condition $u(x, 0) = f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. Il est possible, mais pas indispensable, de paramétrer les caractéristiques à l'aide des fonctions ch et sh.

Beaucoup d'élèves ne concluent pas en écrivant explicitement $u(x, y) = f(\sqrt{x^2 - y^2})$.

3 Lois de Snell-Descartes (3 pts)

On considère un rayon lumineux se propageant dans le plan (x, y) dans un milieu d'indice $n(x)$; la trajectoire du rayon lumineux est donnée par l'équation $y = h(x)$.

Question 8 [1,62/2]: Écrire la fonctionnelle et le lagrangien associés à ce problème. Donner l'équation d'Euler-Lagrange satisfaite par le rayon lumineux.

L'erreur la plus courante est de dire que le lagrangien ne dépend pas de x, ce qui est faux car il en dépend via $n(x)$, puis d'utiliser l'intégrale du mouvement. Quelques élèves introduisent une contrainte alors qu'il n'y en a pas. Dans beaucoup de copies, la dérivée qui apparait dans l'équation d'Euler-Lagrange est développée, ce qui n'est pas nécessaire et donne des calculs très lourds.

Question 9 [0,25/1]: Retrouver la loi de Snell-Descartes : à une interface plane entre un milieu d'indice n_1 et un milieu d'indice n_2, en notant θ_i l'angle entre le rayon et la normale au plan dans le milieu i, $n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2)$.

Beaucoup d'élèves se perdent dans les calculs. D'autres suppose que les angles sont petits, ce qui rend la réponse immédiate. À noter, quelques sadiques tournent le repère ($n = n_1$ pour $y > 0$, $n = n_2$ pour $y < 0$).

4 Loi de la médiane de variables aléatoires continues (7 pts)

On considère $2N + 1$ variables aléatoires continues indépendantes et identiquement distribuées, $(X_i)_{0 \leq i \leq 2N}$; on note F_X la fonction de répartion de X_0 et $f_X = F'_X$ la densité associée. On note Y_i la i-ème variable quand elles sont classées par ordre croissant : Y_0 est le minimum, Y_{2N} le maximum et Y_N est la médiane.

Question 10 [0,58/2]: Quelle est la probabilité $\mathrm{P}(Y_k \in [x, x + \epsilon])$ pour un petit ϵ ? En déduire la densité de probabilité de Y_k, f_{Y_k}.

Assez peu d'élèves ont fait le raisonnement en cherchant le nombre de variables $\leq x$ et $\geq x + \epsilon$. Ceux qui l'ont fait ont souvent oublié le facteur combinatoire ou le terme en $f_X(x)$. Au final, seuls 3 élèves ont trouvé la formule correcte (le plus souvent pas complètement développée).

Question 11 [0,31/2]: On s'intéresse maintenant à des variables aléatoires uniformes sur l'intervalle $[0, 1]$. Déterminer les lois de Y_0, Y_1 et Y_2 pour $N = 1$. Donner leur espérance et leur variance.

Beaucoup d'élèves ont cherché la loi des Y_i indépendemment de la question précédente, ce qui est une bonne idée. Peu ont trouvé le bon résultat (sauf pour le maximum, Y_2, fait en TD) et ont donné des densités non normalisées conduisant à des espérances supérieures à 1 ou négatives.

Question 12 [0,04/3]: Donner un équivalent de $\mathrm{Var}(Y_N)$ dans la limite $N \to \infty$. Vous pouvez développer la densité de Y_N autour de son maximum et montrer que Y_N suit approximativement une loi Gaussienne. Comparez avec la variance de $M_N = (\sum_{i=0}^{2N} X_i)/(2N + 1)$.

Seuls trois élèves ont essayé de répondre à cette question. Deux ont donné la variance de M_N, ce qui est facile. Un a trouvé la variance de Y_N.

ESPCI Paris PSL – Promotion 140 – Mathématiques

Épreuve du mardi 13 décembre 2022

Durée : 2h

Documents autorisés : notes de cours ; machines à calculer et téléphones portables interdits.

23 points au total, note ramenée sur 20.

1 Équation de Fokker-Planck (8 pts)

Soit $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ telle que l'intégrale $Z = \int \exp(-V(\boldsymbol{r}))\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ soit finie. On considère l'équation de Fokker-Planck associée, pour $u(\boldsymbol{r}, t)$:

$$\partial_t u(\boldsymbol{r}, t) = \nabla^2 u(\boldsymbol{r}, t) + \nabla \cdot [u(\boldsymbol{r}, t)\nabla V(\boldsymbol{r})] = \mathcal{L}u(\boldsymbol{r}, t), \tag{1}$$

où nous avons défini l'opérateur différentiel $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}f(\boldsymbol{r}) = \nabla^2 f(\boldsymbol{r}) + \nabla \cdot [f(\boldsymbol{r})\nabla V(\boldsymbol{r})] = \nabla \cdot \left(\mathrm{e}^{-V(\boldsymbol{r})}\nabla\left[\mathrm{e}^{V(\boldsymbol{r})}f(\boldsymbol{r})\right]\right). \tag{2}$$

Question 1 [0,70/2]: Montrez que $\mathcal{L}$ est auto-adjoint pour le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int \mathrm{e}^{V(\boldsymbol{r})} f(\boldsymbol{r}) g(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}\boldsymbol{r}. \tag{3}$$

Vous pourrez utiliser des intégrations par parties.

La forme développée de $\mathcal{L}$ est souvent utilisée pour l'IPP, ce qui donne des calculs plus lourds et quelques abandons. Beaucoup ne disent rien sur l'annulation des termes de bord, alors qu'il suffit de dire, par exemple, qu'on choisit des fonctions f et g qui décroissent suffisamment vite.

Question 2 [0,13/1]: Déterminez le signe des valeurs propres de $\mathcal{L}$.

Plusieurs élèves utilisent des théorèmes du type « $\mathcal{L}$ est auto-adjoint », donc ses valeurs propres sont positives », qui sont bien sûr faux.

Question 3 [0,14/1]: Montrez que 0 est valeur propre de $\mathcal{L}$ et déterminez le mode propre $\phi_0(\boldsymbol{r})$ associé.

Beaucoup d'élèves cherchent à résoudre $\mathcal{L}\phi_0 = 0$ à partir de la forme factorisée. Ce n'est pas évident et cela conduit souvent à utiliser des implications douteuses, qui arrivent parfois à la bonne solution (dans ce cas, il aurait suffit de chercher au brouillon puis de présenter directement la solution qui marche).

Question 4 [0,27/2]: Montrez que la solution de l'équation de Fokker-Planck (1) avec une condition initiale $u(\boldsymbol{r}, 0) = u_0(\boldsymbol{r})$ est unique. Vous pouvez étudier l'évolution de la quantité $\|v(\boldsymbol{r}, t)\|^2 = \langle v(\boldsymbol{r}, t), v(\boldsymbol{r}, t)\rangle$ pour $v(\boldsymbol{r}, t)$ solution avec une condition initiale nulle.

Quand la dérivée temporelle est utilisée correctement, beaucoup ne voient pas qu'il faut utiliser $\langle v, \mathcal{L}v\rangle \leq 0$, qui est vu à la première question et utilisé pour la deuxième. Quelques élèves ne retiennent que le laplacien pour se rapprocher du cours, mais cela ne permet pas de conclure.

Question 5 [0,05/2]: Pour la condition initiale $u_0(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$, déterminez la limite $u_\infty(\boldsymbol{r}) = \lim_{t\to\infty} u(\boldsymbol{r}, t)$.

Beaucoup d'élèves se contentent de dire que la limite est le mode propre associé à la valeur propre 0. Ce n'est pas faux, mais cela ne donne pas le coefficient, et ne constitue pas une preuve de la convergence. Pour cela, il faut invoquer une décomposition en modes propres et la négativité des valeurs propres, ce qu'aucun élève n'a fait.

2 Méthode des caractéristiques (5 pts)

Soit l'équation aux dérivées partielles définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ par

$$x\partial_x u(x, y) + y\partial_y u(x, y) + 2u(x, y) = 0. \tag{4}$$

Question 6 [1,33/2]: Déterminez l'équation des courbes caractéristiques $(\hat{x}(s), \hat{y}(s))$. Déterminez la caractéristique qui passe par le point $(\cos(\theta_0), \sin(\theta_0))$. Tracez une famille de caractéristiques.

L'erreur la plus courante est d'utiliser la paramétrisation $\hat{x}(s) = \mathrm{e}^s$, $\hat{y}(s) = y_0\mathrm{e}^s$ (puis de trouver $y_0 = \tan(\theta_0)$), qui ne permet pas de paramétriser les demi-droites verticales. Quelques élèves ne tracent pas les caractéristiques ou trouvent des formes farfelues (ellipses, hyperboles, cercle).

Question 7 [1,23/3]: Quelle équation différentielle satisfait $\hat{u}(s) = u(\hat{x}(s), \hat{y}(s))$? Quelle est la solution qui satisfait $u(\cos(\theta_0), \sin(\theta_0)) = \cos(\theta_0)^3$. Vous pouvez utiliser les coordonnées polaires (r, θ) et écrire la solution pour $u(r, \theta)$.

La plupart des élèves trouvent l'équation des caractéristiques et savent la résoudre. Ensuite, quand il s'agit de passer de la solution sur les caractéristiques à la solution pour $u(r, \theta)$, c'est souvent n'importe quoi. Par exemple, les notations $u(r, \theta)$ et $\hat{u}(s, \theta_0)$ (ou $u(x, y)$ et $\hat{u}(s, y_0)$) sont utilisées de façon incohérente. Plus rarement, des formes très compliquées avec des termes du type $\cos(\arctan(y/x))$ sont obtenues.

3 Inégalité de Poincaré (4 pts)

On considère le segment $[0, L]$. La norme d'une fonction f sur ce segment est définie par $\|f\|^2 = \int_0^L f(x)^2 \mathrm{d}x$. On veut montrer l'inégalité de Poincaré : « il existe une constante c_L telle que pour toute fonction f telle que $f(0) = f(L) = 0$, $\|f\| \leq c_L \|f'\|$. »

Soit f telle que $f(0) = f(L) = 0$, montrons que $\|f\| \leq c_L\|f'\|$ pour une constante c_L. On introduit la fonction $g = \frac{f}{\|f'\|}$, alors $g(0) = g(L) = 0$ et $\|g'\| = 1$; il faut donc montrer que $\|g\| \leq c_L$. Si on cherche la constante c_L optimale (la plus petite possible), on aboutit au problème suivant :

Question 8 [2,57/4]: Déterminez la fonction g sur $[0, L]$ telle que $g(0) = g(L) = 0$ et $\|g'\| = 1$ et de norme maximale. Que vaut la constante c_L ? Notez que maximiser $\|g\|$ revient au même que maximiser $\|g\|^2$ et que $\|g'\|^2 = 1$.

La plupart des élèves trouve le Lagrangien et l'équation d'Euler-Lagrange associée ; d'autres passent par l'intégrale du mouvement puis la dérivent, ce qui revient au même (mais est un peu plus long). La plupart des élèves montrent ensuite que la solution est de la forme $g_n(x) = a_n \sin(\pi n x/L)$. Il y a ensuite beaucoup de difficultés avec le calcul des normes : soit les élèves prennent le maximum pour la norme, soit ils ne savent pas intégrer $\sin^2$ sur $[0, L]$.

4 Durée de vie d'un circuit électronique (3 pts)

On considère un circuit électronique constitué de N composants. La durée de vie du composant n, X_n, est une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ_n ; les durées de vie des différents composants sont indépendantes. La durée de vie du circuit Y est égale au minimum des durées de vie des composants : $Y = \min_n(X_n)$.

Question 9 [0,69/1]: Quelle est l'espérance de la durée de vie du composant n, $t_n = \mathrm{E}(X_n)$ (faîtes le calcul) ?

L'erreur la plus courante est de se tromper sur la densité, en prenant soit $f(x) = \mathrm{e}^{-\lambda_n x}$, soit $f(x) = -\lambda_n \mathrm{e}^{-\lambda_n x}$; le plus souvent, cette erreur est compensée par une erreur dans le calcul qui permet d'arriver au bon résultat (j'ai mis 0 dans ce cas).

Question 10 [1,67/2]: Montrez que la durée de vie du circuit est une variable aléatoire exponentielle et donnez son paramètre. Exprimez l'espérance de la durée de vie du circuit, $t_\mathrm{c} = \mathrm{E}(Y)$, en fonction des durées de vie des différents composants.

Assez peu d'erreurs, j'ai enlevé $0,5$ quand l'indépendance des variables aléatoires n'est pas mentionnée, ou quand il n'est pas écrit que $Y \geq t = \bigcap_{n=1}^{N}(X_n \geq t)$.

5 Ordre de deux variables aléatoires uniformes (3 pts)

X est une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$ et Y est une variable aléatoire uniforme sur $[0, \alpha]$, $\alpha \in [0, 1]$; X et Y sont indépendantes.

Question 11 [2,36/3]: Quelle est la probabilité $\mathrm{P}(X \geq Y)$?

Le conditionnement est parfois mal écrit, par exemple $\mathrm{P}(X \geq Y) = \mathrm{P}(X \geq Y | X \leq \alpha) + \mathrm{P}(X \geq Y | X > \alpha)$. Parfois, des valeurs intermédiaires sont introduites un peu n'importe comment, par exemple $\mathrm{P}(X \geq Y) = \int_0^\alpha \mathrm{P}(X \geq x) \times \mathrm{P}(Y \leq x) \mathrm{d}x$.