ESPCI PARIS | PSL

Travaux dirigés de Mathématiques

2ème année (2020-2021)

1 Équations aux dérivées partielles (EDP)

1.1 Méthode des caractéristiques

1 Donner la solution générale de l'EDP suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2x\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

Trouver la ou les solutions satisfaisant aux conditions aux limites suivantes :

(a) $u(x=0,y) = y^2, \quad \forall y \in \mathbb{R}$.

(b) $u = 2$ sur la parabole $y = x^2$.

2 Trouver la solution de l'EDP suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + x^2\frac{\partial u}{\partial y} = -yu \tag{2}$$

avec $u = \phi(y)$ pour $x = 0$ et $\forall y \in \mathbb{R}$.

1.2 Méthode des fonctions de Green

1.2.1 Fonctions de Green de l'équation de la chaleur

On considère un problème de diffusion, dont l'équation (de la chaleur, ou de la diffusion) s'écrit :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - D\Delta\right] T(\mathbf{r},t) = S(\mathbf{r},t) \tag{3}$$

où Δ est l'opérateur Laplacien pour la dimension d'espace considérée.

3 Cas des domaines infinis. On considère ici l'équation définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

(a) On considère comme conditions aux limites à l'infini les conditions de Dirichlet homogènes, c'est-à-dire $G_{\infty,n}(r,t) \to 0$ quand $\|\mathbf{r}\| \to \infty$. Calculer la fonction de Green causale $G^+_{\infty,n}(\mathbf{r},t)$ de l'opérateur de diffusion en prenant la transformée de Fourier de l'EDP qui définit la fonction de Green. Pour le calcul de la transformée de Fourier inverse, on inversera d'abord en temps, puis en espace.

(b) Calculer la limite de $G^+_{\infty,n}(\mathbf{r},t)$ lorsque $t \to 0^+$.

(c) Donner l'expression intégrale de la solution du problème de la diffusion avec terme source.

4 Application à un problème avec condition initiale. On souhaite à présent résoudre un problème avec condition initiale, c'est-à-dire trouver $T(\mathbf{r},t)$ définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ tel que

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - D\Delta\right] T(\mathbf{r},t) = 0 \quad \text{avec} \quad T(\mathbf{r},t=0) = \phi(\mathbf{r}) \quad \forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

(a) On va transformer le problème à valeur initiale en un problème à terme source pour t quelconque. Pour cela, poser $T_H(\mathbf{r},t) = H(t)T(\mathbf{r},t)$ et appliquer l'opérateur à $T_H(\mathbf{r},t)$ au sens des distributions. En déduire la solution cherchée $T(\mathbf{r},t)$ définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$.

(b) Vérifier que la solution précédente satisfait à la condition initiale.

1.2.2 Fonctions de Green de l'équation de d'Alembert

On considère l'équation suivante de définition de la fonction de Green de l'équation de d'Alembert :

$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right] G_{\infty,n}(\mathbf{r},t) = \delta(\mathbf{r})\delta(t) \tag{5}$$

où $(\mathbf{r},t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, et Δ est l'opérateur laplacien pour la dimension d'espace considérée n.

On considère le cas de l'espace infini, avec des conditions de Dirichlet homogènes à l'infini.

5 Cas tri-dimensionnel On cherche une (ou des) solution(s) $G_{\infty,3}(x,y,z,t)$ de l'équation suivante :

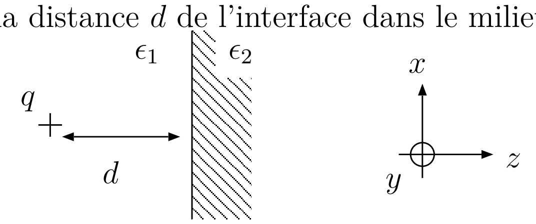
$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right] G_{\infty,3}(x,y,z,t) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(t). \tag{6}$$

(a) Prendre la transformée de Fourier temporelle de l'équation précédente : on obtient l'équation de Helmholtz.

(b) Vérifier que $1/(4\pi r)\exp[\pm ikr]$ avec $k = \omega/c$ est bien solution de l'équation de Helmholtz, au sens des distributions. Indication : on vérifiera l'égalité par définition de l'égalité de deux distributions.

(c) Par transformation de Fourier inverse en temps, en déduire plusieurs fonctions de Green possibles. On notera $G^+_{\infty,3}(\mathbf{r},t)$ la fonction de Green causale, dite aussi fonction de Green *retardée.*

6 Méthode des images On considère deux milieux de permittivités statiques ϵ_1 et ϵ_2 séparés par une interface plane en $z = 0$. On souhaite calculer le potentiel électrostatique V généré par une charge q située à la distance d de l'interface dans le milieu 1.



On rappelle que le champ électrique vérifie l'équation de Maxwell-Gauss $\boldsymbol{\nabla}\cdot[\epsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})] = \rho(\mathbf{r})$ où ρ est la densité de charges associée à la source. Le champ électrique est relié au potentiel par $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}V$.

(a) On s'intéresse tout d'abord au cas d'un milieu infini de permittivité ϵ_1. Donner l'équation vérifiée par le potentiel V_1 créé par la charge q dans un tel milieu. En déduire l'expression du potentiel.

(b) On considère maintenant le problème avec l'interface. Pour cela, on suppose que
— le potentiel dans le milieu 1 ($z < 0$) s'écrit comme la superposition du potentiel V_1 et d'un potentiel V_1' créé toujours dans le milieu 1 par une charge q' symétrique de q par rapport à l'interface ;
— le potentiel dans le milieu 2 ($z > 0$) s'écrit comme le potentiel V_2'' créé dans le milieu 2 par une charge q'' située à la position de la charge q.

Vérifier que de tels potentiels sont compatibles avec l'équation de Maxwell-Gauss (on vérifiera en particulier que les conditions aux limites à l'interface déduites de cette équation sont vérifiées). Déterminer les valeurs de q' et q''.

1.3 Méthode de séparation des variables

On considère l'équation de Laplace à l'extérieur du disque ouvert de rayon $R > 0$ centré à l'origine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (r > R, 0 \leq \theta < 2\pi) \tag{7}$$

avec les conditions suivantes sur la frontière du disque

$$u(R, \theta) = f(\theta) \quad (0 \leq \theta < 2\pi) \tag{8}$$

où f est une fonction donnée, continue sur $[0, 2\pi]$ et 2π-périodique. On va utiliser la méthode de séparation des variables en cherchant une solution de la forme

$$u(r, \theta) = P(r)Q(\theta). \tag{9}$$

7 Établir à partir de l'Éq. (7), les équations différentielles ordinaires satisfaites par les fonctions $P(r)$ et $Q(\theta)$.

8 Résoudre l'équation satisfaite par $Q(\theta)$ en imposant que $Q(\theta)$ soit 2π-périodique.

9 Soit l'équation différentielle ordinaire suivante, dite équation d'Euler :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^2 \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right] = x\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + n^2 y(x) \tag{10}$$

où $n \in \mathbb{N}$ et x est supposé positif. Afin de résoudre cette équation, on introduit la nouvelle fonction $v(\alpha) = y(e^\alpha)$. Trouver l'équation différentielle satisfaite par la fonction $v(\alpha)$ et en déduire la solution générale de l'Éq. (10). On distinguera les cas $n = 0$ et $n \geq 1$.

10 Résoudre l'équation satisfaite par $P(r)$ en supposant cette fonction bornée sur $r > R$.

11 En déduire la solution $u(r, \theta)$ qui satisfait l'Éq. (7) munie de la condition aux limites donnée par l'Éq. (8).

12 Montrer que cette solution peut se réécrire sous la forme

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)(r^2 - R^2)}{r^2 + R^2 - 2rR\cos(\theta - \varphi)}\mathrm{d}\varphi. \tag{11}$$

13 Que se passe-t-il lorsqu'on se place très loin du disque (i.e. $r \gg R$) ?

14 Peut-on utiliser ce qui précède pour cette fois déterminer la solution de l'équation de Laplace à l'intérieur du disque ouvert de rayon $R > 0$ centré sur l'origine et avec les mêmes conditions aux limites ?

1.4 Méthode modale

Les oscillations transverses d'une tige sont décrites par l'équation suivante :

$$EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{12}$$

où $u(x, t)$ représente le déplacement transverse de la tige par rapport à sa configuration d'équilibre. On considère une tige encastrée à l'extrémité $x = 0$ et libre en $x = L$. Les conditions aux limites associées sont $u(0, t) = 0$, $u_x(0, t) = 0$, $u_{xx}(L, t) = 0$, $u_{xxx}(L, t) = 0$.

On s'intéresse à une version adimensionnée du problème, dans lequel l'équation devient

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{13}$$

Les conditions aux limites associées sont $u(0, t) = 0$, $u_x(0, t) = 0$, $u_{xx}(1, t) = 0$, $u_{xxx}(1, t) = 0$. La tige est initialement immobile de sorte que $u_t(x, 0) = 0$ et $u(x, 0) = f(x)$ avec f une fonction arbitraire.

15 Commenter brièvement le sens physique de l'équation et des conditions aux limites associées.

16 On cherche la décomposition en modes propres de $u(x,t)$ sous la forme $u(x,t) = \sum_k a_k(t)u_k(x)$. Donner la forme des fonctions u_k, et les valeurs propres associées.

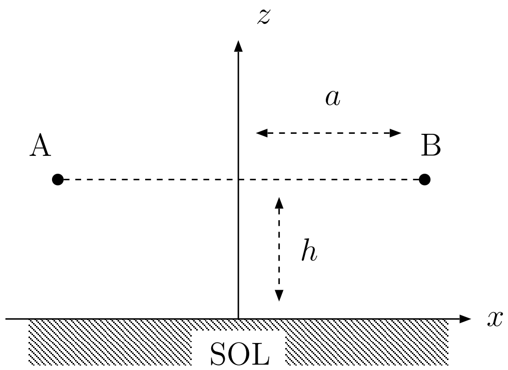
17 Donner la forme de la solution pour la condition initiale choisie.

18 Montrer que la solution est unique.

2 Calcul variationnel

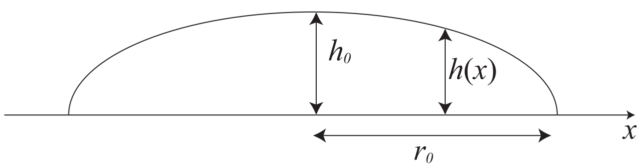
19 Effet mirage. Quel est le trajet d'un rayon lumineux entre les points A et B de coordonnées respectives $(-a, h)$ et $(+a, h)$ quand l'indice optique de l'air varie en fonction de l'altitude selon la loi suivante :

$$n(z) = n_0\sqrt{1 + \frac{z}{z_0}}, \quad z_0 > 0. \tag{14}$$



On précisera les conditions d'existence d'un tel trajet.

20 Bulle pesante. Nous nous intéressons ici à la forme d'une bulle de savon à deux dimensions sous l'influence de la gravité. La forme de la bulle est décrite par la fonction $h(x)$, sa hauteur au sommet est $h(0) = h_0$ et son rayon équatorial est noté r_0 comme le montre la figure ci-dessous.



On admettra que $h'(r_0) = \pm\infty$. L'énergie du système est en partie sous forme d'énergie de surface E_γ, proportionnelle à l'aire Σ de la membrane savonneuse et à la tension superficielle γ. Par ailleurs, la bulle est constituée d'un film de savon d'épaisseur e_0 supposée constante, et de masse volumique ρ. L'énergie potentielle de pesanteur associée est notée E_g. Enfin, nous cherchons la forme d'équilibre de la bulle parmi les formes de volume Ω donné.

(a) Écrire les énergies E_γ et E_g ainsi que le volume de la bulle en fonction du profil $h(x)$.

(b) Montrer que la détermination de la forme de la bulle conduit à minimiser la fonctionnelle suivante :

$$E[h] = \int_0^{r_0} \mathcal{L}(x, h, h')\mathrm{d}x \tag{15}$$

où le Lagrangien $\mathcal{L}$ est défini par :

$$\mathcal{L}(x, h, h') = \gamma \left[2 + \frac{\rho g e_0}{\gamma} h(x)\right] \sqrt{1 + h'(x)^2} - \lambda h(x). \tag{16}$$

(c) Nous introduisons la longueur caractéristique $L = \gamma/(\rho g e_0)$ et définissons $X = x/L$, $H = h/L$, $\Lambda = \lambda L/\gamma$. On obtient ainsi le Lagrangien sans dimension suivant :

$$\mathcal{L}(X, H, H') = [2 + H(X)]\sqrt{1 + H'(X)^2} - \Lambda H(X). \tag{17}$$

Montrer qu'il existe une intégrale de l'équation d'Euler-Lagrange associée à ce problème et que la détermination de la forme de la bulle se ramène à la résolution de l'équation suivante :

$$-\frac{2+H}{(1+H'^2)^{1/2}} + \Lambda H = 0 \quad \text{ou encore} \quad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}X} = \pm\sqrt{\left(\frac{2+H}{\Lambda H}\right)^2 - 1}. \tag{18}$$

(d) Donner l'expression de la hauteur maximale de la bulle H_0 en fonction du multiplicateur de Lagrange Λ. Que représente physiquement Λ ?

(e) Dans la limite $\Lambda \gg 1$, déterminer la forme de la bulle.

3 Probabilités

3.1 Variables aléatoires discrètes

21 Au poker, un joueur reçoit cinq cartes d'un jeu de 52 cartes bien battu. Il observe qu'il a deux As (notés A) et trois autres cartes (notées X, Y, Z) qui ne sont pas des As et qui sont toutes de valeurs différentes les unes des autres (i.e. pas de paires). Le joueur souhaite obtenir un « full » (i.e. trois cartes de même valeur et deux d'une autre). Pour cela, il peut demander à échanger deux ou trois cartes X, Y, Z contre des nouvelles cartes tirées au hasard. A-t-il intérêt à demander plutôt deux ou trois cartes ? À noter que les cartes échangées ne sont pas remises dans le jeu mais laissées à l'écart.

22 Soit $\{X_i\}$ une suite de variables aléatoires réelles de Bernoulli indépendantes où $\forall i \in \mathbb{N}$, $P_{X_i}(X_i = 0) = q$ et $P_{X_i}(X_i = 1) = p$ tel que $p + q = 1$. Si $X_i = 0$ (respectivement $X_i = 1$), on dira qu'au temps i, le résultat de l'épreuve est un échec (respectivement un succès).

Déterminer la distribution de probabilité, l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire réelle T_n représentant le temps qu'il faut attendre pour que le résultat de l'épreuve soit le $n^{\text{ème}}$ succès. Montrer que T_n est la somme de n variables aléatoires réelles indépendantes de même loi que T_1.

Indication : $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{n!(k-n)!} x^{k-n} = \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$ pour $x < 1$.

23 On considère un faisceau laser incident sur un photodétecteur. Pendant un temps de mesure fixé Δt, le nombre $N(\Delta t)$ de photons détectés est une variable aléatoire, dont on se propose de déterminer quelques propriétés.

(a) On considère un nombre $M(T)$ donné de photons aléatoirement et uniformément répartis dans un intervalle de temps T donné, et un intervalle de temps de durée Δt inclus dans T. On note $N(\Delta t)$ le nombre de photons qui sont détectés dans l'intervalle de temps de durée Δt.

Calculer $P(N(\Delta t) = k)$ pour $0 \leq k \leq M(T)$, et déterminer la limite de $P(N(\Delta t) = k)$ lorsque $T \to +\infty$, $M(T) \to \infty$ et $M(T)/T \to \lambda$. Quel est le sens de la limite λ ?

(b) On considère à présent deux intervalles disjoints de durée Δt_1 et Δt_2, tous deux contenus dans l'intervalle de durée T. On note $N_1(\Delta t_1)$ et $N_2(\Delta t_2)$ les nombres de photons détectés dans chaque intervalle correspondant. Calculer $P(N_1(\Delta t_1) = k, N_2(\Delta t_2) = l)$, et calculer sa limite dans les mêmes conditions qu'à la question précédente. Conclusion ?

(c) On considère k détections successives de photons sur des intervalles de durée Δt_1, Δt_2, ..., Δt_k, effectuées sur un faisceau en régime continu. En utilisant les fonctions génératrices, établir la loi suivie par la variable aléatoire N_k = « nombre total de photons détectés ».

24 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes et suivant la même loi donnée par

$$P(X = k) = P(Y = k) = p(1-p)^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{19}$$

On pose $U = \max(X, Y)$. Calculer $P(U \leq k)$ pour tout k. En déduire la loi de U.

3.2 Variables aléatoires continues

25 Quelle est la densité de probabilité de la v.a.r. $Y = e^X$ sachant que X est une v.a.r. normale centrée réduite ?

26 Déterminer la densité de probabilité de la v.a.r. $Z = X_1 + X_2$ où X_1 et X_2 sont deux v.a.r. indépendantes normales de moyennes m_1 et m_2 et de variances σ_1 et σ_2 respectivement.

27 Soient X et Y deux v.a.r. normales centrées réduites indépendantes. On pose $R^2 = X^2 + Y^2$ et $\tan\theta = Y/X$. X et Y peuvent être interprétées comme les coordonnées cartésiennes d'un point aléatoire et R et θ comme ses coordonnées polaires.

Montrer que R et θ sont deux v.a.r. indépendantes, dont on déterminera les distributions.

28 On considère un bâtonnet de longueur l fixée, dont l'orientation est aléatoire isotrope dans l'espace tri-dimensionnel. Quelle est la densité de probabilité de la variable L_Π, où L_Π est la longueur apparente du bâtonnet par projection dans un plan Π donné ? On commencera par exprimer les densités de probabilités des deux angles qui définissent l'orientation du bâtonnet, dans un système approprié de coordonnées sphériques.

29 Démontrer le théorème de la limite centrale en utilisant les fonctions caractéristiques.

30 On lance une pièce à pile ou face. En supposant une infinité de lancers, la proportion de « pile » est de 50 %. On suppose maintenant qu'on n'effectue que 100 lancers. Quel est l'intervalle de confiance à 95 % sur ces lancers ?