

## 1 Mouillage des surfaces texturées

1. L'aire supplémentaire due à un plot est  $2\pi ah$ ; la rugosité est donc donnée par

$$r = 1 + 2\pi\rho ah. \quad (1)$$

Les énergies superficielles effectives sont simplement données par  $\Gamma_{sv} = r\gamma_{sv}$  et  $\Gamma_{sl} = r\gamma_{sl}$ . En utilisant ces énergies effectives dans la loi d'Young, on a

$$\gamma \cos(\theta) = \Gamma_{sv} - \Gamma_{sl} = r(\gamma_{sv} - \gamma_{sl}) = r\gamma \cos(\theta_0). \quad (2)$$

2.  $\cos \theta$  est une fonction linéaire  $\cos \theta_0$  avec une pente  $r > 1$ . Comme  $|\cos(\theta)| \leq 1$ , le démouillage total est atteint pour  $\theta_0 = \theta_m$  avec  $\cos(\theta_m) = -1/r$  et le mouillage total pour  $\theta_0 = \theta'_m$  avec  $\cos(\theta'_m) = 1/r$ .

3. On veut que

$$-1 = r \cos(\theta_0) = (1 + 2\pi\rho ah) \cos(\theta_0), \quad (3)$$

ce qui donne

$$\rho = \frac{1}{2\pi ah} \left[ \frac{-1}{\cos(\theta_0)} - 1 \right] \simeq 0,03 \mu\text{m}^{-2}. \quad (4)$$

En fait, lorsque la surface rugueuse est hydrophobe ( $\theta > 90^\circ$ ), le liquide ne rentre pas entre les plots spontanément. On observe une situation de mouillage composite pour laquelle le liquide est uniquement en contact avec le sommet des plots. Cet état « fakir » est appelé *état Cassie-Baxter*.

4. Calculons les énergies superficielles effectives. L'énergie superficielle solide-vapeur est la même que pour l'état Wenzel :  $\Gamma_{sv} = r\gamma_{sv}$ . En revanche, l'énergie superficielle effective solide-liquide est plus compliquée :

$$\Gamma_{sl} = \phi_s \gamma_{sl} + (r - \phi_s) \gamma_{sv} + (1 - \phi_s) \gamma_{lv}. \quad (5)$$

L'état Cassie-Baxter apparaît quand il est moins énergétique que l'état Wenzel, c'est à dire quand  $\Gamma_{sl}^{\text{CB}} < \Gamma_{sl}^{\text{W}}$ , soit

$$\phi_s \gamma_{sl} + (r - \phi_s) \gamma_{sv} + (1 - \phi_s) \gamma_{lv} < r\gamma_{sl}. \quad (6)$$

Après quelques simplifications et l'introduction de  $\cos(\theta_0)$ , on arrive à la condition

$$\cos(\theta_0) < c = -\frac{1 - \phi_s}{r - \phi_s}. \quad (7)$$

On voit facilement que  $c > -1/r = \cos(\theta_m)$ , et d'autre part  $\cos(\theta_m) > -1$  par définition.

5. En utilisant comme pour l'état Wenzel l'équation de Young-Dupré avec les énergies superficielles effectives,

$$\gamma \cos(\theta) = \Gamma_{sv} - \Gamma_{sl}, \quad (8)$$

on arrive à

$$\cos(\theta) = \phi_s \cos(\theta_0) - 1 + \phi_s. \quad (9)$$

6. Vérifions d'abord qu'on se trouve dans l'état Cassie-Baxter. On peut exprimer la rugosité en fonction de la fraction surfacique :

$$r = 1 + 2\phi_s \frac{h}{a} = 4. \quad (10)$$

On a alors  $c \simeq -0,19 > \cos(\theta_0) = -1/2$ . On trouve pour l'angle apparent

$$\theta = \arccos(\phi_s \cos(\theta_0) - 1 + \phi_s) \simeq 148^\circ. \quad (11)$$

Pour avoir  $\theta = 170^\circ$  avec  $\theta_0 = 120^\circ$ , il faut avoir

$$\phi_s = \frac{1 + \cos(\theta)}{1 + \cos(\theta_0)} \simeq 0,03. \quad (12)$$

Vérifions qu'on reste dans l'état de Cassie-Baxter :

$$c = -\frac{1 - \phi_s}{r - \phi_s} = -\frac{1 - \phi_s}{1 + \phi_s(\frac{2h}{a} - 1)} \simeq -0,76. \quad (13)$$

La condition n'est donc plus vérifiée; il faut donc modifier  $a$  et  $h$ .

## 2 Dynamique de la ligne triple

7. La force de traction peut s'écrire

$$F = \gamma [\cos(\theta_E) - \cos(\theta_D)] \simeq \frac{\gamma}{2} (\theta_D^2 - \theta_E^2). \quad (14)$$

Pour avoir  $F > 0$ , il faut que  $\theta_D > \theta_E$ . La puissance générée par cette force est

$$P = FV \simeq \frac{\gamma V}{2} (\theta_D^2 - \theta_E^2). \quad (15)$$

Cette puissance est principalement dissipée par la viscosité du fluide.

8. Les conditions au bord sont le non glissement sur le substrat,  $v_x(x, 0) = 0$ , et l'absence de contrainte à la surface,  $\partial_z v_x(x, h(x)) = 0$ . On cherche une solution polynomiale (qui correspond à un gradient de pression constant), et on trouve :

$$v_x(x, z) = a(x) \left[ h(x)z - \frac{z^2}{2} \right]. \quad (16)$$

La conservation du volume impose le débit  $Q(x)$  en fonction de la vitesse  $V$  :

$$Q(x) = Vh(x) = \int_0^{h(x)} v_x(x, z) dz = \frac{1}{3} a(x) h(x)^3, \quad (17)$$

ce qui donne  $a(x) = 3V/h(x)^2$ , et donc

$$a(x) = \frac{3V}{h(x)^2}. \quad (18)$$

La vitesse à l'interface vaut

$$v_x(x, h(x)) = \frac{3V}{2}. \quad (19)$$

Elle est supérieure à la vitesse d'avancée de la ligne, ce qui peut paraître surprenant.

9. La puissance dissipée par unité de volume est

$$\eta [\partial_z v_x]^2 = \eta \left[ \frac{3V}{h(x)^2} (h(x) - z) \right]^2 = \frac{9\eta V^2}{h(x)^4} [h(x) - z]^2. \quad (20)$$

En intégrant sur  $z \in [0, h(x)]$  et sur  $x$ , avec  $h(x) = x \tan(\theta_D) \simeq \theta_D x$ , on obtient

$$P_{\text{dis}} = \int_0^\infty dx \int_0^{h(x)} \eta [\partial_z v_x]^2 = 3\eta V^2 \int_0^\infty \frac{dx}{h(x)} \simeq \frac{3\eta V^2}{\theta_D} \int_0^\infty \frac{dx}{x}. \quad (21)$$

Le résultat fait intervenir une intégrale divergente en  $x = 0$  et en  $x \rightarrow \infty$ . En général, cela veut dire qu'il faut « couper » l'intégrale aux bornes problématiques. C'est facile pour le cas  $x \rightarrow \infty$  : il suffit de couper l'intégrale en  $x_{\max}$  qui est donné par la taille de la goutte. Le cas  $x = 0$  fait intervenir ce qui se passe à l'échelle moléculaire, et c'est encore un problème ouvert ; on peut toutefois prendre une échelle moléculaire pour  $x_{\min}$ . Comme les bornes entrent dans un logarithme, leur effet est faible et il n'est pas crucial de les estimer précisément.

10. En égalant les deux puissances, on a

$$\frac{\gamma V}{2} (\theta_D^2 - \theta_E^2) = \frac{3s\eta V^2}{\theta_D}, \quad (22)$$

d'où on déduit

$$\theta_D (\theta_D^2 - \theta_E^2) = \frac{6\eta V}{s\gamma} = \frac{6}{s} \text{Ca}. \quad (23)$$

Le nombre capillaire  $\text{Ca} = \eta V / \gamma$  compare les effets visqueux aux effets capillaires.