Systèmes Linéaires, Signaux et Bruit
Liste de questions

Vincent Démery

Mise à jour le 23 octobre 2020

1. Définissez la causalité et la stabilité d'un système linéaire invariant. Expliquez comment ces propriétés peuvent être déterminées à partir de la réponse impulsionnelle. Faîtes la démonstration pour la causalité.
2. Définissez la causalité et la stabilité d'un système linéaire invariant. Comment la causalité et la stabilité peuvent être déterminées à partir de la fonction de transfert de Laplace $H(p)$? Expliquez cela pour un système du premier ordre d'équation $\tau\dot{s}(t)+s(t)=e(t)$ avec $\tau\in\mathbb{R}$ (τ peut être négatif). Causalité et stabilité sont-elles des notions indépendantes ?
3. On considère le système définit par l'équation différentielle suivante
$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}(t)+5\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t)+2s(t)=e(t). \tag{1}$$
Quelle est sa fonction de transfert ? Déterminez sa réponse indicielle (où l'entrée est la fonction de Heaviside) à l'aide de la transformée de Laplace (exprimez le résultat comme une fonction réelle).
4. On considère un fluide soumis à un cisaillement $\gamma(t)$ qui génère une contrainte $\sigma(t)$. La transformée de Fourier de la contrainte est liée à celle du cisaillement par le module complexe $G(\omega)$, $\tilde{\sigma}(\omega)=G(\omega)\tilde{\gamma}(\omega)$. Que vaut le module complexe d'un solide et d'un fluide newtonien ? Exprimez l'énergie dissipée dans le fluide $E=\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(t)\dot{\gamma}(t)\mathrm{d}t$ à partir des parties réelle et imaginaire du module complexe. Appliquez ce résultat au solide et au fluide newtonien.
5. Décrivez le fonctionnement et l'intérêt de la transmission de signal par modulation d'amplitude. Donnez le principe de la détection synchrone, et son utilité en présence de bruit rose.
6. Donnez les liens qui existent entre la transformée de Fourier et les séries de Fourier : quelle est la transformée de Fourier d'une fonction périodique ? Comment calculer les coefficients de Fourier d'une fonction T-périodique à partir de la transformée de Fourier de son motif ? Vous pouvez écrire une fonction périodique à partir de ses coefficients de Fourier :
$$f(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi t}{T}}. \tag{2}$$
7. Donnez, sans le démontrer, le théorème de Parseval-Plancherel et son interprétation en termes de produit scalaire. Définissez la largeur d'un signal et donnez la relation d'incertitude (sans la démontrer). Illustrez la relation d'incertitude avec la transformée de Fourier de la gaussienne.
8. Calculez la transformée de Fourier du signal $s(t)$ représenté en figure 1 (exprimez le résultat comme une fonction réelle).
9. Montrez le théorème de Shannon-Nyquist, et la formule de reconstruction (ce n'est pas grave s'il manque des facteurs numériques). Expliquez l'utilité d'un filtre anti-repliement.
10. Expliquez qualitativement les effets de l'échantillonage et d'une observation de durée finie sur le spectre d'un signal. En particulier, qu'est-ce qui limite la connaissance du spectre à petite pulsation et à grande pulsation ?
11. Qu'est-ce qu'un signal aléatoire ? Qu'est-ce qu'un signal aléatoire invariant et ergodique (vous pouvez l'expliquer qualitativement) ? Quelle propriété vérifie la fonction de corrélation $\Gamma_u(t,t')=\mathrm{E}[u(t)u(t')]$ d'un signal invariant ? Comment peut-on la mesurer si le signal est ergodique ?
12. La densité spectrale d'un signal aléatoire invariant et ergodique est définie par
$$\mathcal{G}_u(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}T}\mathrm{E}\left[\left|\int_0^T u(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\right|^2\right]. \tag{3}$$
Énoncez et démontrez le théorème de Wiener-Khinchin.

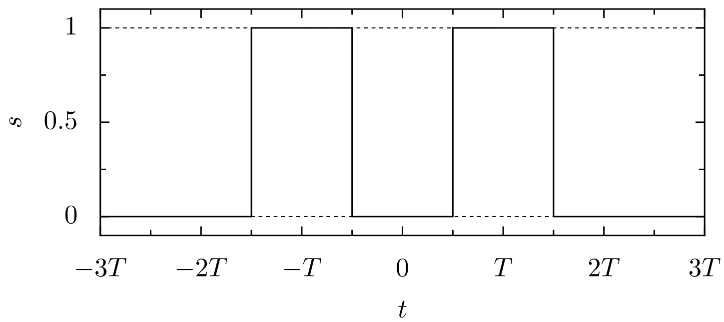

FIGURE 1 – Représentation d'un signal $s(t)$; le signal est nul en dehors de l'intervalle $[-3T, 3T]$.

13. On utilise un filtre de fonction de transfert de Fourier $H_\mathrm{F}(\omega) = 1/(1 + \mathrm{i}\tau\omega)$ pour filtrer un bruit blanc $u(t)$ de densité spectrale de puissance $\mathcal{G}_u(\omega) = \mathcal{G}_0$. Quelle est la densité spectrale de puissance $\mathcal{G}_v(\omega)$ du signal aléatoire $v(t)$ obtenu ? Quelle est la fonction de corrélation $\Gamma_v(t)$ de $v(t)$? On donne $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{1+a^2x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{a}\mathrm{e}^{-|k|/a}$ pour $a > 0$.