ESPCI
Systèmes linéaires, signaux et bruit
Correction du TD 1 : Système avec mémoire exponentielle

1. Ce système est clairement linéaire et invariant : si $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont solutions de l'équation définissant le système pour les entrées $e_1(t)$ et $e_2(t)$, respectivement, alors $s_3(t) = \lambda_1 s_1(t) + \lambda_2 s_2(t)$ est solution pour l'entrée $e_3(t) = \lambda_1 e_1(t) + \lambda_2 e_2(t)$, et $s_4(t) = s_1(t+t_0)$ est solution pour l'entrée $e_4(t) = e_1(t+t_0)$.
2. En prenant $e(t) = \mathrm{e}^{pt}$ et $s(t) = A\mathrm{e}^{pt}$ dans l'équation du système, on obtient
$$\begin{aligned} Ap\mathrm{e}^{pt} &= \mathrm{e}^{pt} - \gamma A \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-(t-t')/\tau} \mathrm{e}^{pt'} \mathrm{d}t' && (1)\\ &= \mathrm{e}^{pt} - \gamma A \mathrm{e}^{pt} \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-(\tau^{-1}+p)(t-t')} \mathrm{d}t' && (2)\\ &= \mathrm{e}^{pt} \left[1 - \gamma A \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(\tau^{-1}+p)u} \mathrm{d}u\right] && (3)\\ &= \mathrm{e}^{pt} \left(1 - \frac{\gamma A}{p+\tau^{-1}}\right). && (4) \end{aligned}$$
Ainsi, la fonction de transfert est
$$A = H(p) = \frac{p+\tau^{-1}}{p^2+\tau^{-1}p+\gamma}. \tag{5}$$
3. Les pôles de la fonction de transfert sont
$$p_{\pm} = -\frac{1}{2\tau}\left(1 \pm \sqrt{1-4\tau^2\gamma}\right) \ ; \tag{6}$$
leur partie réelle est strictement négative, et le système est stable et causal, si $\gamma > 0$.
4. Déterminons la réponse indicielle de ce système, c'est à dire la réponse à la fonction de Heaviside en entrée, avec $s(0) = 0$ et $\dot{s}(0) = 0$. On a donc pour la transformée de Laplace $\hat{e}(p) = 1/p$ et donc
$$\hat{s}(p) = H(p)\hat{e}(p) = \frac{p+\tau^{-1}}{p(p^2+\tau^{-1}p+\gamma)}. \tag{7}$$
Pour inverser la transformée de Laplace, il faut déterminer les pôles du membre de droite et le décomposer en éléments simples. Ses pôles sont 0 et $p_{\pm}$ (Eq. (6)), on peut donc écrire
$$\hat{s}(p) = \frac{A_0}{p} + \frac{A_+}{p-p_+} + \frac{A_-}{p-p_-} \tag{8}$$
avec
$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\gamma\tau}, && (9)\\ A_+ &= \frac{p_+ + \tau^{-1}}{p_+(p_+ - p_-)} = \frac{\tau\left(1-\sqrt{1-4\tau^2\gamma}\right)}{1-4\tau^2\gamma+\sqrt{1-4\tau^2\gamma}}, && (10)\\ A_- &= \frac{p_- + \tau^{-1}}{p_-(p_- - p_+)} = \frac{\tau\left(1+\sqrt{1-4\tau^2\gamma}\right)}{1-4\tau^2\gamma-\sqrt{1-4\tau^2\gamma}}. && (11) \end{aligned}$$

La réponse temporelle est donc

$$s(t) = \frac{1}{\gamma\tau} + A_+ \mathrm{e}^{p_+ t} + A_- \mathrm{e}^{p_- t}. \tag{12}$$

On vérifie par exemple que $s(0) = (\gamma\tau)^{-1} + A_+ + A_- = 0$, $\dot{s}(0^+) = p_+ A_+ + p_- A_- = 1 = e(0^+)$ et $s(t \to \infty) = 1/(\gamma\tau)$, comme on pouvait le prédire avec l'équation du système.

5. La réponse indicielle présente un comportement oscillant si les pôles $p_\pm$ ont une partie imaginaire non nulle, ce qui arrive si $1 - 4\tau^2\gamma < 0$, c'est à dire $\gamma > 1/(4\tau^2)$.

6. En dérivant l'équation du système, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}(t) = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}(t) - \gamma s(t) + \frac{\gamma}{\tau} \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-(t-t')/\tau} s(t') \mathrm{d}t', \tag{13}$$

mais d'après l'équation du système,

$$\gamma \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-(t-t')/\tau} s(t') \mathrm{d}t' = e(t) - \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t), \tag{14}$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \tau^{-1} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) + \gamma s(t) = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}(t) + \tau^{-1} e(t). \tag{15}$$

La fonction de tranfert (5) s'obtient directement à partir de cette relation.