ESPCI
Systèmes linéaires, signaux et bruit
Correction du TD : Transformée de Fourier et échantillonage

1 Calcul et estimation de spectre

1. Le signal $s(t)$ peut s'écrire $s(t) = Ш_{2T} * \Pi_T(t)$, où $Ш_{2T}$ est le peigne de Dirac de période $2T$ et Π_T est la fonction porte de largeur T.
2. On utilise la transformée de Fourier (TF) d'un produit de convolution :
$$\begin{aligned}\tilde{s}(\omega) &= \sqrt{2\pi}\tilde{Ш}_{2T}(\omega) \times \tilde{\Pi}_T(\omega) &(1)\\ &= \sqrt{2\pi} \times \frac{\sqrt{2\pi}}{2T} Ш_{\pi/T}(\omega) \times \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right) &(2)\\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} Ш_{\pi/T}(\omega) \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right). &(3)\end{aligned}$$
En écrivant explicitement le peigne, on a
$$\begin{aligned}\tilde{s}(\omega) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta\left(\omega - \frac{k\pi}{T}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{k\pi}{2}\right) &(4)\\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(\omega) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \delta\left(\omega - \frac{k\pi}{T}\right) \frac{\sin(k\pi/2)}{k}, &(5)\end{aligned}$$
et $\sin(k\pi/2) = 0$ si k pair, 1 si $k = 1[4]$, -1 si $k = 3[4]$ ($[\cdot]$ désigne le modulo).
De manière générale, la TF d'un signal de période T est une somme de distributions de Dirac à la fréquence $\omega = 2\pi/T$ (le fondamental) et à ses multiples (les harmoniques).
3. La fonction FFT affiche le module des coefficients. Dans le cas ci-dessus, elle afficherait
$$\tilde{s}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(\omega) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \delta\left(\omega - \frac{(2n+1)\pi}{T}\right) \frac{1}{2n+1}. \quad (6)$$
4. La composante centrale correspond à la valeur moyenne : la TF inverse de $\sqrt{\pi/2}\delta(\omega)$ est $1/2$. En enlevant cette composante, on obtiendrait le signal $s(t) - 1/2$, dont la valeur moyenne est nulle.
5. L'effet d'une translation sur la TF est facile à voir en général. Si on note $s_{T/2}(t) = s(t - T/2)$, on a :
$$\begin{aligned}\tilde{s}_{T/2}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} s_{T/2}(t)\mathrm{d}t &(7)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} s(t - T/2)\mathrm{d}t &(8)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega (t'+T/2)} s(t')\mathrm{d}t' &(9)\\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega T/2}\tilde{s}(\omega). &(10)\end{aligned}$$

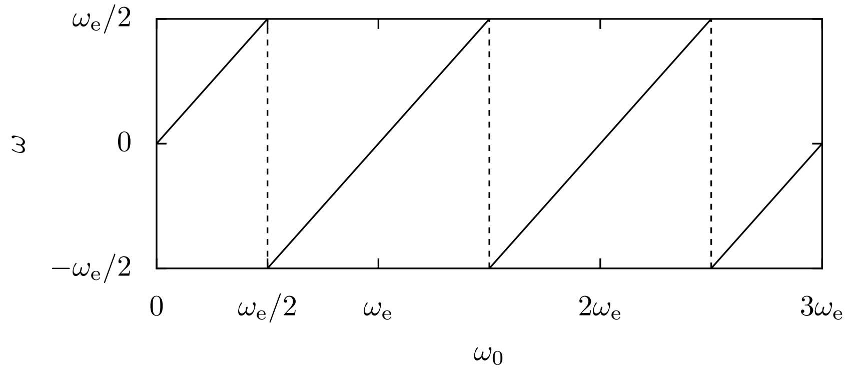

FIGURE 1 – Vitesse de rotation observée ω d'une roue tournant à la vitesse ω_0 quand le mouvement est échantilloné à la pulsation ω_e.

La TF est multipliée par une phase. Comme l'oscilloscope n'affiche que le module de la TF, l'affichage n'est pas modifié.

2 Échantillonage, reconstruction, sous-échantillonage

1. Le spectre du signal échantillonné à une pulsation ω_e est obtenu par « périodisation » du spectre du signal initial, de période ω_e.
2. Pour ne pas que le spectre du signal initial se recouvre avec le spectre de ses « copies », il faut que $2\omega_m < \omega_e$. C'est le critère de Shannon pour un échantillonage sans perte.
3. On ne voit pas de différence qualitative notable entre le signal du milieu, qui est échantillonné correctement, et celui du bas. Il peut paraître surprenant que l'échantillonage du milieu, qui paraît assez mauvais, permette de reconstruire le signal initial.
4. C'est la reconstruction de Shannon. Si l'échantillonnage est correct, le spectre du signal initial peut être obtenu en restreignant le spectre du signal échantillonné à l'intervalle $[-\omega_e/2, \omega_e/2]$. Mathématiquement, cela revient à multiplier le spectre du signal échantillonné par une fonction porte $\Pi_{\omega_e}(\omega)$. Il suffit ensuite de faire la TF inverse du signal échantillonné, ce qui correspond à la TF inverse d'un produit, qui s'écrit donc comme une convolution des deux TF. La TF du signal échantillonné est périodique, sa TF inverse s'écrit donc comme une somme de Diracs (voir question 1.1) ; la TF de la fonction porte est un sinus cardinal. Ainsi le signal reconstruit est une somme de fonctions $\mathrm{sinc}(t)$ translatées.
5. Le spectre de $\cos(1.1t)$ est constitué de Diracs en ± 1.1. Un phénomène de repliement de spectre se produit : la périodisation de ce spectre avec période 1 fait apparaître des pics en ± 0.1. On mesure donc $\cos(0.1t)$ une fois qu'on a coupé le spectre en-dehors de l'intervale $[-0.5, 0.5]$.
6. Les coordonnées du point au cours du temps sont données par $x(t) = \cos(\omega_0 t)$, $y(t) = \sin(\omega_0 t)$, dont les spectres contiennent les pulsations $\pm\omega_0$. Échantilloné à la pulsation ω_e, un signal de pulsation ω est « replié » sur la pulsation $\omega' = \omega_e\{\omega/\omega_e\}$, où $\{x\}$ désigne x moins son arrondi à l'entier le plus proche (par exemple $\{1.3\} = 0.3$, $\{1.8\} = -0.2$, $\{-2.4\} = -0.4$). La pulsation ω_0 est donc repliée sur $\omega = \omega_e\{\omega_0/\omega_e\}$ et la pulsation $-\omega_0$ est repliée sur $\omega_e\{-\omega_0/\omega_e\} = -\omega$. La vitesse de rotation observée du point est donc $\omega = \omega_e\{\omega_0/\omega_e\}$, elle est tracée en fonction de ω_0 en figure 1.