

Vibrations et phénomènes de propagation

PHY3006L

LICENCE 3

Vincent Démery

2026–2027

Version du 7 septembre 2026

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence [Creative Commons](#) “CC0 1.0 Universel”.



Table des matières

Table des matières	5
1 Introduction à la mécanique lagrangienne	7
1.1 Exemple du pendule simple	7
1.2 Équation d'Euler-Lagrange	8
1.2.1 Dérivation	8
1.2.2 Applications et remarques	9
1.3 Frottements	11
2 Oscillateur à un degré de liberté	13
2.1 Oscillations libres	13
2.1.1 Oscillateur harmonique amorti	13
2.1.2 Solution, régimes d'oscillations	13
2.1.3 Approche énergétique	15
2.1.4 Oscillateurs non-linéaires	15
2.2 Oscillations forcées	16
2.2.1 Réponse à une force sinusoïdale, gain complexe	16
2.2.2 Résonance, facteur de qualité	17
2.2.3 Aspect énergétique	19
2.2.4 Sismomètre	19
3 Oscillateurs couplés	21
3.1 Exemples	21
3.1.1 Deux masses en série reliées par des ressorts	21
3.1.2 N masses en série reliées par des ressorts	21
3.1.3 Pendule double	22
3.2 Matrice dynamique, modes propres	23
3.3 Solution générale	24
3.3.1 Exemples de matrices M et K	25
3.3.2 Oscillations libres à deux degrés de liberté	25
3.4 Frottements	26

3.5	Oscillations forcées	27
3.5.1	Forçage des modes propres	27
3.5.2	Exemple pour deux degrés de liberté	28
4	Chaîne d'oscillateurs, limite continue	31
4.1	Chaîne masses-ressorts	31
4.1.1	Matrice dynamique	31
4.1.2	Modes propres	32
4.1.3	Zone de Brillouin	33
4.2	Autres chaînes	33
4.2.1	Chaîne avec liaisons au support	34
4.2.2	Déplacements transverses	34
4.2.3	Chaîne diatomique	35
4.3	Limite continue	38
4.3.1	Modes propres et valeurs propres	39
4.3.2	Équations du mouvement	39
4.3.3	Chaîne avec liaisons au support	40
4.3.4	Énergies cinétique et potentielle	40
4.3.5	Puissance transmise	41
4.3.6	Interfaces	42
5	Ondes progressives	45
5.1	Ondes stationnaires et progressives	45
5.1.1	Ondes stationnaires	45
5.1.2	Ondes progressives	45
5.1.3	Vitesses de phase et de groupe	46
5.1.4	Puissance d'une onde progressive	47
5.1.5	Ondes progressives en milieu non-dispersif	47
5.2	Forçage d'un milieu semi-infini	48
5.3	Réflexion et transmission à une interface	49
5.3.1	Transmission d'une onde progressive	49
5.3.2	Génération d'une onde évanescence	51
6	Vibrations des cordes, membranes, et solides	53
6.1	Vibrations d'une corde	53
6.1.1	Vibrations transverses d'une chaîne masses-ressorts	53
6.1.2	Bilan des forces sur le milieu continu	53
6.2	Vibrations d'une membrane	54
6.2.1	Bilan des forces	55

6.2.2	Densité et courant d'énergie	55
6.2.3	Modes propres	56
6.2.4	Ondes progressives	57
6.3	Vibrations d'une poutre	58
6.3.1	Modules de compression et de cisaillement	58
6.3.2	Équations du mouvement	59
7	Ondes dans les fluides	61
7.1	Ondes sonores	61
7.1.1	Équations de base et hypothèse acoustique	61
7.1.2	Équation des ondes sonores	62
7.1.3	Courant d'énergie et puissance sonore	63
7.1.4	Ondes acoustiques	64
7.1.5	Interface, impédance acoustique	66
7.2	Ondes de surface	66
7.2.1	Énoncé du problème et équations de base	66
7.2.2	Onde plane progressive harmonique	67

Chapitre 1

Introduction à la mécanique lagrangienne

1.1 Exemple du pendule simple

On considère un pendule de masse m suspendu à un point fixe par une tige de longueur ℓ et de masse négligeable. La tige ne peut tourner que sur un axe et fait un angle $\theta(t)$ avec la verticale. Le système est soumis à la gravité et on note g l'accélération de la pesanteur. On cherche à utiliser le principe fondamental de la dynamique (PFD) pour déterminer l'équation différentielle satisfaite par $\theta(t)$.

Il n'est pas évident d'utiliser directement le PFD pour établir l'équation du mouvement. Cela vient du fait que la force exercée par la tige est inconnue. Néanmoins, sa direction est connue : elle s'exerce selon l'axe de la tige. En conséquence, elle est toujours perpendiculaire au mouvement et sa puissance est nulle et elle n'intervient pas dans la conservation de l'énergie mécanique E_m . Écrivons explicitement les composantes cinétique et potentielle de l'énergie mécanique :

$$E_m = E_c + E_p, \quad (1.1)$$

$$E_c = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2, \quad (1.2)$$

$$E_p = mg\ell[1 - \cos(\theta)]. \quad (1.3)$$

La conservation de l'énergie mécanique s'écrit donc

$$0 = \frac{dE_m}{dt} = m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg\ell\dot{\theta}\sin(\theta). \quad (1.4)$$

En supposant que $\dot{\theta} \neq 0$, on en déduit que

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin(\theta). \quad (1.5)$$

Nous avons donc obtenu l'équation du mouvement sans avoir écrit une seule équation vectorielle, introduit des axes, etc. Nous allons maintenant généraliser cette approche pour des systèmes à N degrés de liberté. Par exemple, cette approche permettra de traiter simplement un système de N pendules mis bout à bout, notamment le pendule double.

1.2 Équation d'Euler-Lagrange

1.2.1 Dérivation

Considérons un système de N points matériels de positions $\vec{r}_i(t)$, $i \in \{1, \dots, N\}$ et de masses m_i . On suppose que des contraintes s'appliquent sur ce système de sorte que les positions des points matériels soient des fonctions de seulement $n < N$ variables indépendantes $q_j(t)$, $i \in \{1, \dots, n\}$: on écrira $\vec{r}_i(t) = \vec{r}_i(q_j(t))$. Dans le cas du pendule, $\vec{r}(t)$ décrit la position de la masse et $q(t) = \theta(t)$. On cherche une méthode systématique pour écrire l'équation du mouvement pour les *coordonnées généralisées* $q_j(t)$.

L'hypothèse du Principe de d'Alembert est que les forces $\vec{F}_{c,i}$ résultant des contraintes ne travaillent pas, $\vec{F}_{c,i} \cdot \vec{v}_i = 0$, où $\vec{v}_i$ est la vitesse du point i . C'est le cas de la force de la tige pour le pendule simple. Si on note $\vec{F}_i$ la force restante sur le point i , c'est à dire la résultante des forces qui ne viennent pas des contraintes, on a donc

$$\sum_{i=1}^N (m_i \dot{\vec{v}}_i - \vec{F}_i) \cdot \vec{v}_i = 0. \quad (1.6)$$

Explicitons les deux termes en fonction des variables q_j . Commençons par exprimer les vitesses :

$$\vec{v}_i = \sum_j \dot{q}_j \partial_{q_j} \vec{r}_i, \quad (1.7)$$

où ∂_{q_j} dénote la dérivée partielle par rapport à q_j , en utilisant la règle de la chaîne. On en déduit que le deuxième terme de l'équation (1.6) s'écrit

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \sum_j \dot{q}_j \partial_{q_j} \vec{r}_i = \sum_j Q_j \dot{q}_j, \quad (1.8)$$

où nous avons introduit la *force généralisée*

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \partial_{q_j} \vec{r}_i. \quad (1.9)$$

Si les forces $\vec{F}_i$ dérivent d'une énergie potentielle, $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_i} E_p$, alors

$$Q_j = - \sum_i \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} E_p \cdot \partial_{q_j} \vec{r}_i = -\partial_{q_j} E_p, \quad (1.10)$$

où nous avons reconnu la règle de la chaîne. De la même façon que les forces sur les points matériels, les forces généralisées dérivent d'une énergie potentielle.

Intéressons-nous maintenant au premier terme de l'équation (1.6) :

$$\sum_i m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = \frac{dE_c}{dt}. \quad (1.11)$$

Écrivons maintenant l'énergie cinétique en fonction des variables q_i , en utilisant la relation (1.7) :

$$E_c = \sum_{i,j,k} \frac{m_i}{2} \partial_{q_j} \vec{r}_i \cdot \partial_{q_k} \vec{r}_i \dot{q}_j \dot{q}_k = \sum_{j,k} \frac{1}{2} \mu_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (1.12)$$

où la « masse » μ_{jk}

$$\mu_{jk} = \sum_i m_i \partial_{q_j} \vec{r}_i \cdot \partial_{q_k} \vec{r}_i \quad (1.13)$$

dépend en général de toutes les coordonnées généralisées q_l . Explicitons la dérivée temporelle de l'énergie cinétique :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_{j,k,l} \frac{1}{2} \partial_{q_l} \mu_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{j,k} \mu_{jk} \dot{q}_j \ddot{q}_k \quad (1.14)$$

$$= \sum_{j,k,l} \partial_{q_l} \mu_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{j,k} \mu_{jk} \dot{q}_j \ddot{q}_k - \sum_{j,k,l} \frac{1}{2} \partial_{q_l} \mu_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \dot{q}_l \quad (1.15)$$

$$= \sum_j \dot{q}_j \left(\sum_{k,l} \partial_{q_l} \mu_{jk} \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_k \mu_{jk} \ddot{q}_k \right) - \sum_l \dot{q}_l \partial_{q_l} E_c \quad (1.16)$$

$$= \sum_j \dot{q}_j \frac{d}{dt} \left(\sum_k \mu_{jk} \dot{q}_k \right) - \sum_j \dot{q}_j \partial_{q_j} E_c \quad (1.17)$$

$$= \sum_j \dot{q}_j \frac{d}{dt} \left(\partial_{\dot{q}_j} E_c \right) - \sum_j \dot{q}_j \partial_{q_j} E_c \quad (1.18)$$

$$= \sum_j \dot{q}_j \left[\frac{d}{dt} \left(\partial_{\dot{q}_j} E_c \right) - \partial_{q_j} E_c \right]. \quad (1.19)$$

Nous avons introduit la dérivée par rapport à $\dot{q}_j$: $\partial_{\dot{q}_j} E_c = \sum_k \mu_{jk} \dot{q}_k$.

En utilisant les relations (1.8) et (1.19) dans le principe de d'Alembert, on obtient

$$\sum_j \dot{q}_j \left[\frac{d}{dt} \left(\partial_{\dot{q}_j} E_c \right) - \partial_{q_j} E_c + \partial_{q_j} E_p \right] = 0. \quad (1.20)$$

En notant que $\partial_{\dot{q}_j} E_p = 0$ et en introduisant le *lagrangien*

$$L = E_c - E_p, \quad (1.21)$$

l'équation (1.20) s'écrit

$$\sum_j \dot{q}_j \left[\frac{d}{dt} \left(\partial_{\dot{q}_j} L \right) - \partial_{q_j} L \right] = 0. \quad (1.22)$$

En supposant que cette relation est vraie pour tous les $\dot{q}_j$, on obtient l'équation d'Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \left(\partial_{\dot{q}_j} L \right) = \partial_{q_j} L. \quad (1.23)$$

1.2.2 Applications et remarques

Application au pendule. Pour le pendule discuté plus haut, il y a une seule variable généralisée : l'angle θ . Les énergies cinétique (Éq. (1.2)) et potentielle (Éq. (1.3)) permettent d'écrire le lagrangien

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{m\ell^2}{2} \dot{\theta}^2 - mg\ell[1 - \cos(\theta)]. \quad (1.24)$$

Les dérivées partielles s'écrivent

$$\partial_{\theta} L = -mg\ell \sin(\theta), \quad (1.25)$$

$$\partial_{\dot{\theta}} L = m\ell^2 \dot{\theta}. \quad (1.26)$$

Et l'équation d'Euler-Lagrange (1.23) donne donc :

$$\frac{d}{dt} \left(m\ell^2 \dot{\theta} \right) = -mg\ell \sin(\theta). \quad (1.27)$$

C'est bien l'équation du pendule.

Application à un point matériel dans un potentiel. On peut appliquer l'équation d'Euler-Lagrange au mouvement d'un point matériel de masse m et de position $\vec{r}(t)$ dans un potentiel $V(\vec{r})$, où les coordonnées généralisées q_j sont simplement les coordonnées cartésiennes. Le lagrangien s'écrit

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = E_c - E_p = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r}). \quad (1.28)$$

Ses dérivées sont

$$\nabla_{\vec{r}} L = -\nabla V(\vec{r}), \quad (1.29)$$

$$\nabla_{\dot{\vec{r}}} L = m\dot{\vec{r}}. \quad (1.30)$$

L'équation d'Euler-Lagrange (Éq. (1.23)) s'écrit alors

$$\frac{d}{dt} (m\dot{\vec{r}}) = -\nabla V(\vec{r}), \quad (1.31)$$

ce qui est bien le principe fondamental de la dynamique.

Degrés de liberté indépendants. Si le lagrangien d'un système à deux degrés de liberté q_1 et q_2 peut s'écrire comme la somme de deux lagrangiens L_1 et L_2 à un degré de liberté (L_j ne faisant intervenir que q_j), alors l'équation d'Euler-Lagrange (1.23) montre que les degrés de liberté sont indépendants, c'est à dire que la dynamique de q_1 ne fait pas intervenir q_2 et réciproquement.

Équations linéaires et lagrangien quadratique. Nous nous concentrerons dans la suite de ce cours sur l'étude d'équations d'oscillateurs *linéaires*. Quand un système est décrit par des équations non-linéaires, comme le pendule (Éq. (1.5)), son étude commence souvent par la résolution des équations linéarisées. Ainsi, les équations linéaires jouent un rôle central en physique. En mécanique lagrangienne, une équation du mouvement linéaire correspond à un lagrangien quadratique ; cela s'explique par le fait que l'équation d'Euler-Lagrange (1.23) contient des dérivées par rapport aux coordonnées généralisées, et que la dérivée d'un terme quadratique est linéaire. Linéariser une équation du mouvement revient donc à développer le lagrangien correspondant à l'ordre 2.

Oscillations de faible amplitude du pendule. Illustrons la correspondance entre équation linéaire et lagrangien quadratique dans le cas du pendule. Dans le cas de petites oscillations, son équation du mouvement (1.5) peut être linéarisée :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin(\theta) = -\frac{g}{\ell} \theta + \mathcal{O}(\theta^3) \simeq -\frac{g}{\ell} \theta. \quad (1.32)$$

Son lagrangien (1.24) peut également être développé à l'ordre quadratique :

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{m\ell^2}{2} \dot{\theta}^2 - mg\ell[1 - \cos(\theta)] = \frac{m\ell^2}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{mg\ell}{2} \theta^2 + \mathcal{O}(\theta^4) \simeq \frac{m\ell^2}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{mg\ell}{2} \theta^2. \quad (1.33)$$

On peut calculer ses dérivées partielles,

$$\partial_{\theta} L = -mg\ell\theta, \quad (1.34)$$

$$\partial_{\dot{\theta}} L = m\ell^2 \dot{\theta}, \quad (1.35)$$

d'où on déduit l'équation du mouvement,

$$\frac{d}{dt} (m\ell^2 \dot{\theta}) = -mg\ell\theta, \quad (1.36)$$

qui est bien l'équation du mouvement linéarisée (1.32).

1.3 Frottements

Nous avons traité le cas de forces conservatives dérivant d'une énergie potentielle, mais ce formalisme permet aussi de traiter le cas de forces de frottement. Nous nous restreignons ici au cas de frottements visqueux sur les points matériels : nous supposons que le point matériel i a un coefficient de friction visqueuse λ_i et subit donc une force

$$\vec{F}_{i,\text{visq}} = -\lambda_i \vec{v}_i. \quad (1.37)$$

Ces forces ajoutent une composante visqueuse dans l'équation (1.8) :

$$\sum_i \vec{F}_{i,\text{visq}} \cdot \vec{v}_i = -\sum_i \lambda_i v_i^2 = -\sum_i \lambda_i \sum_{j,k} \partial_{q_j} \vec{r}_i \cdot \partial_{q_k} \vec{r}_i \dot{q}_j \dot{q}_k = -\sum_{j,k} \Lambda_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = \sum_j Q_{j,\text{diss}} \dot{q}_j, \quad (1.38)$$

où nous avons introduit le coefficient de friction généralisé Λ_{jk} et la force dissipative généralisée $Q_{j,\text{diss}}$:

$$\Lambda_{jk} = \sum_i \lambda_i \sum_{j,k} \partial_{q_j} \vec{r}_i \cdot \partial_{q_k} \vec{r}_i, \quad (1.39)$$

$$Q_{j,\text{diss}} = -\sum_k \Lambda_{jk} \dot{q}_k. \quad (1.40)$$

En incorporant la dissipation à l'équation (1.22), on obtient

$$\sum_j \dot{q}_j \left[\frac{d}{dt} (\partial_{\dot{q}_j} L) - \partial_{q_j} L - Q_{j,\text{diss}} \right] = 0. \quad (1.41)$$

L'équation d'Euler-Lagrange (1.23) devient donc

$$\frac{d}{dt} (\partial_{\dot{q}_j} L) = \partial_{q_j} L + Q_{j,\text{diss}}. \quad (1.42)$$

La force dissipative généralisée peut se réécrire avec la *fonction de dissipation* D :

$$Q_{j,\text{diss}} = -\partial_{\dot{q}_j} D, \quad (1.43)$$

$$D = \frac{1}{2} \sum_{k,l} \Lambda_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l. \quad (1.44)$$

L'équation d'Euler-Lagrange avec frottements s'écrit finalement

$$\frac{d}{dt} (\partial_{\dot{q}_j} L) = \partial_{q_j} L - \partial_{\dot{q}_j} D. \quad (1.45)$$

Application au pendule avec frottements. On considère maintenant le cas où la masse qui est au bout du pendule subit une force de frottement visqueuse de coefficient de friction λ . Le coefficient de friction généralisé (Éq. (1.39)) et la fonction de dissipation (Éq. (1.44)) sont donc

$$\Lambda = \lambda \ell^2, \quad (1.46)$$

$$D = \frac{\Lambda}{2} \dot{\theta}^2. \quad (1.47)$$

L'équation d'Euler-Lagrange avec frottements (Éq. (1.45)) s'écrit donc

$$m\ell^2 \ddot{\theta} = -mg\ell \sin(\theta) - \lambda \ell^2 \dot{\theta}, \quad (1.48)$$

qui se simplifie en

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin(\theta) - \frac{\lambda}{m} \dot{\theta}. \quad (1.49)$$

Chapitre 2

Oscillateur à un degré de liberté

2.1 Oscillations libres

2.1.1 Oscillateur harmonique amorti

Pour éviter les répétitions, nous introduisons directement l'oscillateur harmonique amorti. Pour la coordonnée généralisée $q(t)$, son équation s'écrit :

$$\ddot{q}(t) + 2\alpha\dot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = 0. \quad (2.1)$$

Le deuxième terme représente la force de frottement et le troisième la force de rappel. Les coefficients α et ω_0 sont des inverses de temps.

Pour le pendule amorti dans la limite de faibles oscillations (Éqs. (1.32, 1.49)), $q = \theta$, $\omega_0^2 = g/\ell$ et $\alpha = \lambda/(2m)$. Pour une masse m de coefficient de friction visqueuse λ attachée à un point fixe par un ressort de raideur k et dont le déplacement ne se fait que sur un axe, $q = x$, où x est le déplacement par rapport à la position d'équilibre, $\omega_0^2 = k/m$ et $\alpha = \lambda/(2m)$.

L'oscillateur est dit *harmonique* quand son équation de mouvement est linéaire. Si elle ne l'est pas, il est *anharmonique*; c'est le cas du pendule (Éqs. (1.5, 1.49)). Nous allons étudier dans un premier temps le comportement de l'oscillateur harmonique avant d'évoquer les oscillateurs anharmoniques.

2.1.2 Solution, régimes d'oscillations

L'équation de l'oscillateur harmonique amorti (2.1) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants; elle a donc deux solutions exponentielles indépendantes. On insérant une solution de cette forme, $q(t) = \exp(at)$, avec $a \in \mathbb{C}$, dans l'équation (2.1), on obtient une équation pour a :

$$a^2 + 2\alpha a + \omega_0^2 = 0. \quad (2.2)$$

Il s'agit de l'*équation caractéristique* de l'équation différentielle. C'est une équation polynomiale dont l'ordre est donné par l'ordre de l'équation différentielle.

Le discriminant de l'équation (2.2) est :

$$\Delta = 4(\alpha^2 - \omega_0^2). \quad (2.3)$$

La nature des solutions dépend de son signe :

- Si $\Delta > 0$ (soit $\alpha > \omega_0$, ou amortissement fort), l'équation caractéristique admet deux solutions réelles.

- Si $\Delta < 0$ (soit $\alpha > \omega_0$, ou amortissement faible), l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées.
- Si $\Delta = 0$ (soit $\alpha = \omega_0$, ou amortissement critique), l'équation caractéristique admet une solution réelle double.

Écrivons explicitement les solutions dans chacun des cas et discutons-les.

Amortissement fort, régime apériodique. Si $\alpha > \omega_0$, les deux solutions sont réelles :

$$a_{\pm} = -\alpha \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = -\alpha \pm \beta, \quad (2.4)$$

où nous avons défini

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} < \alpha. \quad (2.5)$$

D'après cette inégalité, les deux solutions $a_{\pm}$ sont négatives. La solution à l'équation (2.1) est donc une somme d'exponentielles décroissantes :

$$q(t) = A_+ e^{a_+ t} + A_- e^{a_- t} = e^{-\alpha t} (A_+ e^{\beta t} + A_- e^{-\beta t}). \quad (2.6)$$

Ce comportement correspond au *régime apériodique*.

Amortissement faible, régime pseudo-périodique. Si $\alpha < \omega_0$, les solutions sont complexes conjuguées :

$$a_{\pm} = -\alpha \pm \frac{i}{2} \sqrt{|\Delta|} = -\alpha \pm i\omega, \quad (2.7)$$

où nous avons défini

$$\omega = \sqrt{|\Delta|} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}. \quad (2.8)$$

La solution à l'équation (2.1) est alors

$$q(t) = A_+ e^{a_+ t} + A_- e^{a_- t} = e^{-\alpha t} (A_+ e^{i\omega t} + A_- e^{-i\omega t}). \quad (2.9)$$

Cette solution est réelle si les coefficients sont complexes conjugués ; on note alors $A_{\pm} = A' \pm iA''$ et

$$A_+ e^{i\omega t} + A_- e^{-i\omega t} = 2A' \cos(\omega t) - 2A'' \sin(\omega t). \quad (2.10)$$

La solution est donc oscillante, avec une enveloppe qui décroît exponentiellement. C'est le régime *pseudo-périodique*, ou *sous-amorti*, avec des oscillations de pulsation ω (Éq. (2.8)), décalée de la pulsation de l'oscillateur harmonique non amorti, multipliées par une exponentielle décroissante avec un taux de décroissance α .

La solution (2.9) n'est pas périodique. En revanche, elle garde la même forme après une pseudo-période $T = 2\pi/\omega$:

$$q(t + T) = e^{-\alpha T} q(t). \quad (2.11)$$

Décalée d'une pseudo-période, elle est identique à un coefficient multiplicatif près, que l'on peut aussi exprimer avec le *décroissement logarithmique*

$$\delta = \ln \left(\frac{q(t)}{q(t + T)} \right) = \alpha T = \frac{2\pi\alpha}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}. \quad (2.12)$$

En particulier, le décroissement logarithmique peut se calculer avec la valeur de la fonction $q(t)$ aux maxima locaux t_k^* , où $k \in \mathbb{Z}$ est un nombre entier qui indique le maximum considéré. D'après la

relation (2.11), ces maxima sont séparés de T , c'est à dire que $t_k^* = t_0^* + kT$. On peut donc obtenir le décrement logarithmique en considérant deux maxima locaux séparés de n pseudo-périodes :

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{q(t_k^*)}{q(t_{k+n}^*)} \right). \quad (2.13)$$

L'oscillateur harmonique non-amorti (parfois simplement appelé « oscillateur harmonique ») correspond au cas $\alpha = 0$. Ses solutions sont périodiques avec la pulsation ω_0 .

Régime critique. Quand $\alpha = \omega_0$, l'équation caractéristique a une racine double

$$a = -\alpha = -\omega_0. \quad (2.14)$$

La solution à l'équation (2.1) est alors

$$q(t) = (A + Bt)e^{-\alpha t}. \quad (2.15)$$

Même en présence du terme Bt qui diverge, cette expression tend vers 0 avec un temps de relaxation $1/\alpha$.

2.1.3 Approche énergétique

Discutons rapidement du comportement des énergies cinétique, potentielle et mécanique pour l'oscillateur harmonique amorti. L'approche énergétique est utile pour comprendre qualitativement les comportements observables pour un oscillateur anharmonique. Nous introduisons les énergies de la façon suivante :

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{q}^2, \quad (2.16)$$

$$E_p = \frac{\omega_0^2}{2} q^2. \quad (2.17)$$

Il faudrait les multiplier par la masse, mais c'est un facteur qui n'a pas d'importance dans cette discussion. Calculons la dérivée temporelle de l'énergie mécanique, $E_m = E_c + E_p$:

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{q}^2 + \frac{\omega_0^2}{2} q^2 \right) = \dot{q} (\ddot{q} + \omega_0^2 q) = -2\alpha \dot{q}^2 = -4\alpha E_c. \quad (2.18)$$

Sans amortissement ($\alpha = 0$), l'énergie mécanique est conservée. L'amplitude des oscillations peut être obtenue avec l'énergie mécanique : quand la coordonnée $q(t)$ atteint son maximum, l'énergie cinétique est nulle et donc $E_m = E_p = \omega_0^2 q_{\max}^2 / 2$, soit $q_{\max} = \sqrt{2E_m} / \omega_0$.

Avec amortissement ($\alpha > 0$), l'énergie mécanique décroît et tend vers 0. D'après l'argument ci-dessus, l'amplitude des oscillations décroît aussi progressivement.

2.1.4 Oscillateurs non-linéaires

Discutons le comportement d'un oscillateur non-linéaire en prenant l'exemple du pendule amorti, dont l'équation est de la forme (Éq. (1.49))

$$\ddot{q} + 2\alpha \dot{q} + \omega_0^2 \sin(q) = 0. \quad (2.19)$$

Les énergies cinétique et potentielle correspondantes sont (à la masse près)

$$E_c = \frac{1}{2}\dot{q}^2, \quad (2.20)$$

$$E_p = \omega_0^2[1 - \cos(q)]. \quad (2.21)$$

Commençons par le cas du pendule non-amorti ($\alpha = 0$). Son énergie mécanique E_m est conservée. À la différence de l'oscillateur harmonique (Éq. (2.17)), son énergie est bornée : $0 \leq E_p \leq 2\omega_0^2$. En conséquence, la relation entre l'énergie mécanique et l'amplitude des oscillations utilisée pour l'oscillateur harmonique fait apparaître deux régimes :

- Si $E_m < 2\omega_0^2$, le pendule oscille entre les positions $\pm q_{\max}$ qui sont solution de $E_m = \omega_0^2[1 - \cos(q)]$; c'est le *régime lié*. Contrairement à l'oscillateur harmonique, la période des oscillations dépend de leur amplitude.
- Si $E_m > 2\omega_0^2$, l'énergie cinétique est strictement positive pour tout temps et le pendule tourne dans la même direction sans s'arrêter; c'est le *régime libre*.

Dans le cas amorti, l'énergie du pendule décroît avec le temps et celui-ci peut donc passer du régime libre au régime lié, dans lequel l'amplitude des oscillations décroît et finit par s'annuler.

2.2 Oscillations forcées

2.2.1 Réponse à une force sinusoïdale, gain complexe

On cherche la réponse d'un oscillateur harmonique amorti à un forçage sinusoïdal à la pulsation ω , c'est à dire la réponse à l'équation suivante :

$$\ddot{q}(t) + 2\alpha\dot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = f_0 \cos(\omega t). \quad (2.22)$$

Le choix d'un forçage sinusoïdal n'est pas arbitraire : d'une part, cela permet de calculer la réponse explicitement, et, d'autre part, on sait avec l'analyse de Fourier que tout terme source $f(t)$ peut se décomposer comme somme de termes sinusoïdaux.

La solution est la superposition d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière. Avec amortissement ($\alpha > 0$), la solution de l'équation homogène tend vers zéro et disparaît après un régime transitoire. On se contente donc de chercher une solution particulière. Il est en fait plus simple de chercher la réponse à un forçage complexe :

$$\ddot{q}(t) + 2\alpha\dot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = f_0 e^{i\omega t}. \quad (2.23)$$

Le cosinus de l'équation (2.22) peut-être décomposé en somme de fonctions exponentielles et le principe de superposition peut être utilisé. En cherchant la solution sous la forme $q(t) = q_0 \exp(i\omega t)$, on obtient l'équation

$$(-\omega^2 + 2i\alpha\omega + \omega_0^2) q_0 = f_0, \quad (2.24)$$

dont on peut immédiatement déduire la réponse,

$$q_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\alpha\omega} = g(\omega) f_0, \quad (2.25)$$

où $g(\omega)$ est le *gain complexe*. Comme l'équation est linéaire, l'amplitude complexe de la réponse est proportionnelle à l'amplitude de la force, et le coefficient de proportionnalité est le gain.

On peut isoler le module G et la phase ϕ du gain, tels que $g = G \exp(i\phi)$. Le module vaut

$$G(\omega) = \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2 \right]^{-1/2}. \quad (2.26)$$

La phase s'obtient en séparant les parties réelle et imaginaire :

$$g(\omega) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\alpha\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}. \quad (2.27)$$

Pour la déterminer, il faut faire attention au quadrant du plan complexe dans lequel on se trouve. On suppose ici que $\alpha > 0$ et $\omega > 0$. On voit que la partie réelle de $g(\omega)$ change de signe quand $\omega = \omega_0$, alors que la partie imaginaire est toujours négative. On a donc

$$\phi(\omega) = -\arctan\left(\frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \in \left[0, -\frac{\pi}{2}\right], \quad \text{si } \omega < \omega_0, \quad (2.28a)$$

$$\phi(\omega) = \arctan\left(\frac{2\alpha\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right) - \pi \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\pi\right] \quad \text{si } \omega > \omega_0. \quad (2.28b)$$

Comme $g(-\omega) = g(\omega)^*$ (l'astérisque indique le complexe conjugué), $\phi(-\omega) = -\phi(\omega)$: la phase est une fonction impaire de ω , alors que le module $G(\omega)$ est une fonction paire.

On peut maintenant revenir à l'équation de départ (Éq. (2.22)). Le forçage est donné par

$$f(t) = f_0 \cos(\omega t) = \frac{f_0}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}). \quad (2.29)$$

La réponse est donc :

$$q(t) = \frac{f_0}{2} [g(\omega)e^{i\omega t} + g(-\omega)e^{-i\omega t}] \quad (2.30)$$

$$= \frac{f_0 G(\omega)}{2} [e^{i(\omega t + \phi(\omega))} + e^{-i(\omega t + \phi(\omega))}] \quad (2.31)$$

$$= f_0 G(\omega) \cos(\omega t + \phi(\omega)). \quad (2.32)$$

Les rôles du module et de la phase du gain apparaissent ici clairement :

- le module est le rapport entre l'amplitude en module de la réponse et celle du forçage,
 - la phase est le déphasage entre le forçage et la réponse.
- À partir des expressions (2.28), on peut identifier les cas limites suivants :
- À basse fréquence, $\omega \rightarrow 0$, $\phi(\omega) \rightarrow 0$, la réponse est en phase avec l'excitation.
 - À la pulsation propre, $\omega = \omega_0$, $\phi(\omega_0) = -\pi/2$, la réponse est en quadrature de phase.
 - À haute fréquence, $\omega \rightarrow \infty$, $\phi(\omega) \rightarrow -\pi$, la réponse est en opposition de phase.

2.2.2 Résonance, facteur de qualité

Étudions plus en détail le comportement du module $G(\omega)$ (Éq. (2.26)) en fonction de la pulsation de l'excitation. À basse fréquence, $\omega \rightarrow 0$, il tend vers $1/\omega_0^2$; la réponse de l'oscillateur harmonique est contrôlée par la raideur de l'oscillateur. À haute fréquence, $\omega \rightarrow \infty$, il décroît comme $G(\omega) \sim \omega^{-2}$; la réponse est alors contrôlée par l'inertie de l'oscillateur.

Le plus intéressant peut se produire à une fréquence intermédiaire ; pour le voir, étudions les variations de la fonction

$$H(\omega) = G(\omega)^{-2} = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2. \quad (2.33)$$

Ses variations donnent directement accès aux variations du module mais sa forme est plus facile à étudier. Calculons

$$H'(\omega) = 4\omega(\omega^2 - \omega_0^2) + 8\alpha^2\omega = 4\omega(\omega^2 - \omega_0^2 + 2\alpha^2). \quad (2.34)$$

Le terme entre parenthèses peut s'annuler si $\alpha < \omega_0/\sqrt{2}$, il y a donc deux comportements possibles. Si $\alpha > \omega_0/\sqrt{2}$, la fonction $H(\omega)$ est strictement croissante, ce qui implique que le module du gain

$G(\omega)$ est strictement décroissant. D'après les comportements asymptotiques, la transition entre le comportement à basse fréquence et celui à haute fréquence a lieu pour $\omega \simeq \omega_0$. Dans ce cas, le système se comporte comme un *filtre passe-bas* avec une fréquence de coupure ω_0 .

Si $\alpha < \omega_0/\sqrt{2}$, la fonction $H(\omega)$ atteint un minimum pour

$$\omega = \omega^* = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}, \quad (2.35)$$

et le module du gain atteint donc un maximum : c'est le phénomène de *résonance*. Le module du gain à la résonance est

$$G^* = G(\omega^*) = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}. \quad (2.36)$$

On peut comparer le gain à la résonance au gain à fréquence nulle $G_0 = G(0)$:

$$\frac{G^*}{G_0} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}, \quad (2.37)$$

où nous avons introduit le *facteur d'amortissement*

$$\zeta = \alpha/\omega_0, \quad (2.38)$$

qui est un nombre sans dimension. On remarque que $H(\omega^*)/H(0) = 4\zeta^2(1 - \zeta^2)$, et que $\zeta^2 < 1/2$ dans ce régime, donc $H(\omega^*)/H(0)$ est une fonction croissante de ζ , avec $H(\omega^*)/H(0) \rightarrow 0$ quand $\zeta \rightarrow 0$ et $H(\omega^*)/H(0) = 1$ quand $\zeta = 1/\sqrt{2}$. En revenant au gain, on a

$$\frac{G^*}{G_0} \underset{\zeta \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2\zeta}, \quad (2.39)$$

$$\frac{G^*}{G_0} \underset{\zeta = 1/\sqrt{2}}{=} 1. \quad (2.40)$$

Dans ce régime, le système se comporte comme un *filtre passe-bande*. Plus le facteur d'amortissement du filtre est faible, plus sa résonance est importante, et on définit le facteur de qualité $Q = 1/(2\zeta)$. On définit parfois les fréquences de coupure $\omega_{\pm}$ comme les fréquences auxquelles le module du gain au carré est égal à la moitié de sa valeur maximale, soit $G(\omega_{\pm}) = G^*/\sqrt{2}$. En l'écrivant pour $H(\omega)$, on a $H(\omega_{\pm}) = 2H(\omega^*) = 8\zeta^2(1 - \zeta^2)\omega_0^4$. On arrive à l'équation suivante :

$$\omega_{\pm}^4 + 2(2\alpha^2 - \omega_0^2)\omega_{\pm}^2 + \omega_0^4 - 8\alpha^2\omega_0^2 + 8\alpha^4 = 0, \quad (2.41)$$

d'où on déduit

$$\omega_{\pm} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2 \pm \sqrt{\Delta}}, \quad (2.42)$$

$$\Delta = 4\alpha^2(\omega_0^2 - \alpha^2). \quad (2.43)$$

Dans la limite $\alpha \ll \omega_0$, on peut estimer la largeur de la bande passante à l'ordre le plus bas en α ,

$$\Delta\omega = \omega_+ - \omega_- = \frac{\omega_+^2 - \omega_-^2}{\omega_+ + \omega_-} \simeq \frac{\sqrt{\Delta}}{\omega_0} \simeq 2\alpha. \quad (2.44)$$

2.2.3 Aspect énergétique

On suppose ici que les énergies cinétique et potentielle sont données par les équations (2.16, 2.17). Leur valeur moyenne peut être évaluée à partir de la solution (2.32), en notant que $\langle \cos(\omega t)^2 \rangle = \langle \sin(\omega t)^2 \rangle = 1/2$, où $\langle \cdot \rangle$ désigne la moyenne sur une période :

$$\langle E_c \rangle = \frac{\omega_0^2 f_0^2 G(\omega)^2}{4}, \quad (2.45)$$

$$\langle E_p \rangle = \frac{\omega^2 f_0^2 G(\omega)^2}{4}, \quad (2.46)$$

$$\langle E_m \rangle = \frac{f_0^2 G(\omega)^2}{4} (\omega^2 + \omega_0^2). \quad (2.47)$$

On peut comparer cette énergie moyenne avec la puissance fournie par la force extérieure :

$$\langle P_{\text{ext}} \rangle = \langle \dot{q}(t) f(t) \rangle = -f_0^2 \omega G(\omega) \langle \sin(\omega t + \phi(\omega)) \cos(\omega t) \rangle = -\frac{f_0^2 \omega G(\omega)}{2} \sin(\phi(\omega)), \quad (2.48)$$

où nous avons décomposé $\sin(\omega t + \phi(\omega)) = \sin(\omega t) \cos(\phi(\omega)) + \cos(\omega t) \sin(\phi(\omega))$, et utilisé que $\langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle = 0$. À partir des parties réelle et imaginaire du gain complexe (Éq. (2.27)), nous pouvons exprimer

$$\sin(\phi(\omega)) = \frac{-2\alpha\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} = -2\alpha\omega G(\omega). \quad (2.49)$$

En l'insérant dans l'expression de la puissance extérieure, on a

$$\langle P_{\text{ext}} \rangle = \alpha f_0^2 \omega^2 G(\omega)^2. \quad (2.50)$$

La puissance fournie par la force extérieure correspond à la puissance dissipée par les frottements. On peut comparer l'énergie dissipée pendant un cycle, $W = (2\pi/\omega) \langle P_{\text{ext}} \rangle$, avec l'énergie mécanique moyenne :

$$\frac{W}{\langle E_m \rangle} = \frac{2\pi}{\omega} \frac{\alpha f_0^2 \omega^2 G(\omega)^2}{f_0^2 G(\omega)^2 (\omega^2 + \omega_0^2)/4} = \frac{8\pi\alpha\omega}{\omega^2 + \omega_0^2}. \quad (2.51)$$

Ce rapport est maximal pour $\omega = \omega_0$, pulsation à laquelle il vaut

$$\left(\frac{W}{\langle E_m \rangle} \right)_{\omega=\omega_0} = \frac{4\pi\alpha}{\omega_0} = 4\pi\zeta. \quad (2.52)$$

2.2.4 Sismomètre

Un sismomètre est un appareil de mesure dont on cherche à déterminer le déplacement ou l'accélération. Il est constitué d'un boîtier dont on note le déplacement par rapport à un référentiel galiléen, selon une direction donnée, $y(t)$. À l'intérieur du boîtier se trouve une masse m dont on peut mesurer la position $x(t)$ par rapport au boîtier, qui est reliée au boîtier par un ressort de raideur k et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux λ . La position $x(t)$ est prise par rapport à la position d'équilibre de la masse. Le déplacement total de la masse est donc $x(t) + y(t)$. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse donne donc

$$m \frac{d^2}{dt^2} [x(t) + y(t)] = -kx(t) - \lambda \dot{x}(t). \quad (2.53)$$

On peut réécrire cette équation

$$\ddot{x}(t) + 2\alpha \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = -\ddot{y}(t) = f(t). \quad (2.54)$$

On se ramène au cas d'un oscillateur forcé, pour lequel le forçage est donné par la dérivée seconde de la position du boîtier.

Si le boîtier vibre de façon sinusoïdale, $y(t) = y_0 \cos(\omega t)$, alors $x(t) = y_0 G(\omega) \cos(\omega t + \phi(\omega))$ où $G(\omega)$ et $\phi(\omega)$ sont le module et la phase du gain complexe

$$g(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\alpha\omega}. \quad (2.55)$$

On a pour le module

$$G(\omega) = \frac{\omega^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2]^{1/2}}. \quad (2.56)$$

C'est le même que le gain définit plus haut mais multiplié par ω^2 . En conséquence, il tend vers 0 à basse fréquence et vers 1 à autre fréquence : c'est un filtre *passe-haut*. Il peut aussi présenter une résonnance.

Chapitre 3

Oscillateurs couplés

3.1 Exemples

3.1.1 Deux masses en série reliées par des ressorts

Nous donnons ici quelques exemples d'oscillateurs couplés. Le cas le plus simple est celui de deux points matériels ne se déplaçant que selon une direction, de masses m_1 et m_2 , attachés à un support rigide via des ressorts de raideurs k_1 et k_2 , respectivement, et attachés entre eux via un ressort de raideur k . On note u_1 et u_2 les déplacements par rapport à leurs positions d'équilibre.

L'énergie cinétique du système est alors donnée par

$$E_c = \frac{m_1}{2} \dot{u}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{u}_2^2. \quad (3.1)$$

L'énergie potentielle est la somme des énergies potentielles des trois ressorts :

$$E_p = \frac{k_1}{2} u_1^2 + \frac{k_2}{2} u_2^2 + \frac{k}{2} (u_1 - u_2)^2 \quad (3.2)$$

$$= \frac{k_1 + k}{2} u_1^2 + \frac{k_2 + k}{2} u_2^2 - k u_1 u_2. \quad (3.3)$$

On voit que les deux masses n'apparaissent pas couplées dans l'énergie cinétique (3.1), mais qu'elles sont couplées dans l'énergie potentielle (3.3) à cause du dernier terme.

3.1.2 N masses en série reliées par des ressorts

On peut généraliser le système précédent au cas de N masses reliées par des ressorts. On note $u_1, \dots, u_N$ les déplacements des masses par rapport à leur configuration d'équilibre. Pour simplifier, on suppose que tous les points ont la même masse m , que les ressorts ont tous la même raideur k et que seuls les points 1 et N sont reliés au support. On a donc

$$E_c = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^N \dot{u}_i^2, \quad (3.4)$$

$$E_p = \frac{k}{2} \left(u_1^2 + u_N^2 + \sum_{i=1}^{N-1} (u_i - u_{i+1})^2 \right) \quad (3.5)$$

$$= k \left(\sum_{i=1}^N u_i^2 - \sum_{i=1}^{N-1} u_i u_{i+1} \right). \quad (3.6)$$

3.1.3 Pendule double

On considère ici un pendule double, c'est à dire qu'un deuxième pendule est attaché au bout du premier pendule. On note m_i la masse du pendule i , ℓ_i sa longueur, et θ_i l'angle qu'il fait par rapport à la verticale.

Pour déterminer les énergies cinétique et potentielle du pendule, le plus simple est de partir des positions des extrémités des pendules, $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$:

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} \ell_1 \sin(\theta_1) \\ -\ell_1 \cos(\theta_1) \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

$$\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} \ell_1 \sin(\theta_1) + \ell_2 \sin(\theta_2) \\ -\ell_1 \cos(\theta_1) - \ell_2 \cos(\theta_2) \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

La première coordonnée est la position horizontale, la seconde est la position verticale y , pointant vers le haut. On peut en déduire l'énergie potentielle :

$$E_p = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \quad (3.9)$$

$$= -m_1 g \ell_1 \cos(\theta_1) - m_2 g [\ell_1 \cos(\theta_1) + \ell_2 \cos(\theta_2)] \quad (3.10)$$

$$= -(m_1 \ell_1 + m_2 \ell_2) g \cos(\theta_1) - m_2 g \ell_2 \cos(\theta_2). \quad (3.11)$$

Contrairement au cas des masses reliées par des ressorts (Éq. (3.3)), les degrés de liberté θ_1 et θ_2 ne sont pas couplés dans l'énergie potentielle.

Pour déterminer l'énergie cinétique, il faut calculer les vitesses :

$$\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \ell_1 \dot{\theta}_1 \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

$$\vec{v}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \ell_1 \dot{\theta}_1 \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) \end{pmatrix} + \ell_2 \dot{\theta}_2 \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

L'énergie cinétique est donc

$$E_c = \frac{m_1}{2} \vec{v}_1^2 + \frac{m_2}{2} \vec{v}_2^2, \quad (3.14)$$

$$= \frac{m_1}{2} \ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} [\ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \ell_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2\ell_1 \ell_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2] \quad (3.15)$$

$$= \frac{m_1 \ell_1^2 + m_2 \ell_2^2}{2} \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2 \ell_2^2}{2} \dot{\theta}_2^2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2. \quad (3.16)$$

Le dernier terme couple les deux degrés de liberté ; à la différence du système masses-ressorts discuté plus haut, ils sont ici couplés via l'énergie cinétique.

Les énergies cinétique (3.16) et potentielle (3.11) ne sont pas quadratiques et correspondent donc à des équations du mouvement non linéaires. On peut les développer à l'ordre quadratique pour des déviations faibles par rapport à la verticale. En éliminant les termes constants qui ne modifient pas les équations du mouvement, on obtient :

$$E_c \simeq \frac{m_1 \ell_1^2 + m_2 \ell_2^2}{2} \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2 \ell_2^2}{2} \dot{\theta}_2^2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2, \quad (3.17)$$

$$E_p \simeq \frac{(m_1 \ell_1 + m_2 \ell_2) g}{2} \theta_1^2 + \frac{m_2 g \ell_2}{2} \theta_2^2. \quad (3.18)$$

3.2 Matrice dynamique, modes propres

Considérons un système à N degrés de liberté dont on note $(q_i)_{1 \leq i \leq N}$ les coordonnées généralisées. On note Q le vecteur des coordonnées généralisées ; nous utiliserons les deux notations. On se restreint à un système linéaire, dont le lagrangien est donc quadratique. Les énergies cinétiques et potentielles les plus générales qu'on puisse écrire pour ce système sont

$$E_c = \sum_{i,j} \frac{1}{2} M_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} {}^t \dot{Q} M \dot{Q}, \quad (3.19)$$

$$E_p = \sum_{i,j} \frac{1}{2} K_{ij} q_i q_j = \frac{1}{2} {}^t Q K Q, \quad (3.20)$$

où M et K sont deux matrices symétriques, dont les valeurs propres sont strictement positives pour M et positives ou nulles pour K .

Le lagrangien vaut donc $L = E_c - E_p$ et ses dérivées partielles sont

$$\partial_{q_i} L = \sum_j K_{ij} q_j, \quad (3.21)$$

$$\partial_{\dot{q}_i} L = \sum_j M_{ij} \dot{q}_j. \quad (3.22)$$

L'équation d'Euler-Lagrange (Éq. (1.23)) donne donc

$$\sum_j M_{ij} \ddot{q}_j = - \sum_j K_{ij} q_j, \quad (3.23)$$

où, en écriture vectorielle,

$$M \ddot{Q} = -KQ. \quad (3.24)$$

Comme M est symétrique définie positive, on peut l'inverser et, en introduisant la *matrice dynamique* $A = M^{-1}K$, on peut écrire l'équation du mouvement comme

$$\ddot{Q} = -AQ. \quad (3.25)$$

Les vecteurs propres de A et leur valeurs propres associées définissent respectivement les *modes propres* ϕ_k et les *pulsations propres* $\omega_k \geq 0$ tels que

$$A\phi_k = \omega_k^2 \phi_k. \quad (3.26)$$

Notons qu'il y a autant de modes propres que la dimension du système, c'est à dire N .

Démontrons qu'on peut identifier ces modes propres et que les valeurs propres associées sont positives ou nulles. La difficulté est que la matrice $A = M^{-1}K$ n'est pas symétrique. Cependant, on peut changer de variables pour que l'équation du mouvement fasse intervenir une matrice symétrique. Comme M est symétrique définie positive, on peut la diagonaliser en base orthonormée :

$$M = P D P^{-1}, \quad (3.27)$$

où P est la matrice de passage orthogonale, c'est à dire que ${}^t P P = P {}^t P = \mathbf{1}$, ou $P^{-1} = {}^t P$, et D est une matrice diagonale dont les valeurs propres sont strictement positives. On peut alors définir la « racine carrée » de la matrice M par

$$M^{1/2} = P D^{1/2} {}^t P, \quad (3.28)$$

où $D^{1/2}$ est une matrice diagonale dont les éléments sont les racines carrées des éléments diagonaux de D . Nous pouvons maintenant faire le changement de variables en posant $R = M^{1/2}Q$, $Q = M^{-1/2}R$. Dans l'équation du mouvement (3.24), on obtient

$$MM^{-1/2}\ddot{R} = -KM^{-1/2}R, \quad (3.29)$$

soit

$$\ddot{R} = -M^{-1/2}KM^{-1/2}R = -A'R, \quad (3.30)$$

où $A' = M^{-1/2}KM^{-1/2}$ est la matrice dynamique dans la nouvelle base, qui est symétrique et positive. En conséquence A' est diagonalisable en base orthonormée avec des valeurs propres positives et on peut donc écrire :

$$A'\psi_k = \omega_k'^2 \psi_k. \quad (3.31)$$

En utilisant la définition de A' , on a

$$M^{-1/2}KM^{-1/2}\psi_k = \omega_k'^2 \psi_k, \quad (3.32)$$

soit

$$M^{-1}KM^{-1/2}\psi_k = \omega_k'^2 M^{-1/2}\psi_k, \quad (3.33)$$

c'est à dire que $\phi_k = M^{-1/2}\psi_k$ est valeur propre de $A = M^{-1}K$ pour la valeur propre $\omega_k'^2 = \omega_k^2$.

3.3 Solution générale

L'identification des modes propres de la matrice dynamique (Éq. (3.26)) permet d'écrire la solution générale à l'équation du mouvement (3.25).

En effet, on peut à tout instant t décomposer l'état du système $Q(t)$ sur les modes propres :

$$Q(t) = \sum_{k=1}^N a_k(t) \phi_k. \quad (3.34)$$

En insérant cette décomposition dans l'équation du mouvement (3.25), on obtient

$$\sum_{k=1}^N \ddot{a}_k(t) \phi_k = - \sum_{k=1}^N a_k(t) A \phi_k = - \sum_{k=1}^N \omega_k^2 a_k(t) \phi_k. \quad (3.35)$$

Comme les modes propres forment une base, on peut identifier leurs coefficients de part et d'autre de l'égalité, ce qui donne :

$$\ddot{a}_k(t) = -\omega_k^2 a_k(t), \quad (3.36)$$

dont la solution générale est

$$a_k(t) = \alpha_k \cos(\omega_k t) + \beta_k \sin(\omega_k t), \quad (3.37)$$

où α_k et β_k sont deux coefficients déterminés par les conditions initiales.

Ainsi, la solution générale est

$$Q(t) = \sum_{k=1}^N [\alpha_k \cos(\omega_k t) + \beta_k \sin(\omega_k t)] \phi_k. \quad (3.38)$$

Elle compte $2N$ coefficients, ce qui correspond au fait que c'est un système à N degrés de liberté avec une dynamique du second ordre.

3.3.1 Exemples de matrices M et K

À titre d'exemple, identifions les matrices M et K associées aux systèmes introduits en Sec. 3.1. Pour les deux masses (Sec. 3.1.1), on a

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

$$K = \begin{pmatrix} k_1 + k & -k \\ -k & k_2 + k \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

Le couplage entre les degrés de liberté se manifeste ici par la présence de termes non-diagonaux.

Pour le pendule double, les matrices M et K s'identifient sur les développements quadratiques des énergies (Éq. (3.17, 3.18)) :

$$M = \begin{pmatrix} m_1 \ell_1^2 + m_2 \ell_2^2 & m_2 \ell_1 \ell_2 \\ m_2 \ell_1 \ell_2 & m_2 \ell_2^2 \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

$$K = \begin{pmatrix} (m_1 \ell_1 + m_2 \ell_2)g & 0 \\ 0 & m_2 \ell_2 g \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

3.3.2 Oscillations libres à deux degrés de liberté

Pour avoir une idée des phénomènes qui peuvent apparaître quand deux oscillateurs sont couplés, regardons en détail un cas particulier simple : le cas de deux systèmes masse m -ressort de raideur k couplés par un ressort de raideur k' (Sec. 3.1.1). Nous allons d'abord étudier les oscillations libres de ce système avant de regarder les oscillations forcées.

Modes propres. Commençons par identifier les modes propres, et rappelons pour cela les matrices M et K (Éqs. (3.39, 3.40)) :

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} = m\mathbf{1}, \quad (3.43)$$

$$K = \begin{pmatrix} k + k' & -k' \\ -k' & k + k' \end{pmatrix} = k\mathbf{1} + k' \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

Avec les coefficients choisis, les matrices ont donc une forme assez simple. En particulier, M est proportionnelle à l'identité, et il suffit donc de diagonaliser K , qui est elle-même la somme d'une matrice diagonale et d'une matrice simple (deuxième terme de l'équation (3.44)). Les modes propres de celle-ci sont

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad (3.45)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

Les modes propres de la matrice dynamique $A = M^{-1}K$ sont donc

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad (3.47)$$

$$\phi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \omega_2^2 = \frac{k + 2k'}{m}. \quad (3.48)$$

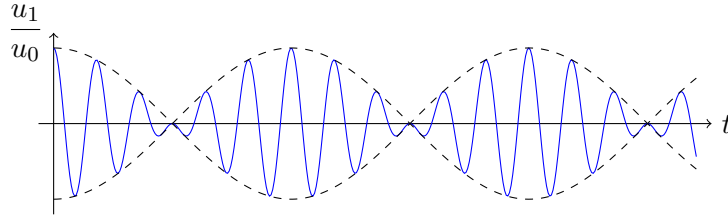


FIGURE 3.1 – Phénomène de battement observé pour la position d’une masse quand deux systèmes masse-ressort sont couplés (Éq. (3.53)). Ici, nous avons pris $\omega_1 = 5$, $\omega_2 = 6$, ce qui correspond à $k/m = 25$, et $k'/m = 5.5$. La courbe bleue représente la position $u_1(t)$, les courbes noires représentent l’enveloppe.

Le mode ϕ_1 correspond à un déplacement identique des deux masses, raison pour laquelle il est indépendant de k' . Le mode ϕ_2 correspond à un déplacement opposé des deux masses ; il a une plus grande pulsation parce qu’il est plus « raide ».

Oscillations libres. La solution générale à l’équation du mouvement (3.25), est donnée par une somme sur les modes (Éq. (3.38)) :

$$Q(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^2 [\alpha_k \cos(\omega_k t) + \beta_k \sin(\omega_k t)] \phi_k \quad (3.49)$$

$$= [\alpha_1 \cos(\omega_1 t) + \beta_1 \sin(\omega_1 t)] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + [\alpha_2 \cos(\omega_2 t) + \beta_2 \sin(\omega_2 t)] \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

Les positions des masses valent donc

$$u_1(t) = \alpha_1 \cos(\omega_1 t) + \beta_1 \sin(\omega_1 t) + \alpha_2 \cos(\omega_2 t) + \beta_2 \sin(\omega_2 t), \quad (3.51)$$

$$u_2(t) = \alpha_1 \cos(\omega_1 t) + \beta_1 \sin(\omega_1 t) - \alpha_2 \cos(\omega_2 t) + \beta_2 \sin(\omega_2 t). \quad (3.52)$$

Considérons une solution initiale particulière, par exemple $u_1(0) = u_0$, $u_2(0) = 0$ et $\dot{u}_1(0) = \dot{u}_2(0) = 0$; les coefficients valent alors $\alpha_1 = \alpha_2 = u_0/2$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Les positions sont donc

$$u_1(t) = \frac{u_0}{2} [\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)] = u_0 \cos\left(\frac{[\omega_1 + \omega_2]t}{2}\right) \cos\left(\frac{[\omega_2 - \omega_1]t}{2}\right), \quad (3.53)$$

$$u_2(t) = \frac{u_0}{2} [\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)] = u_0 \sin\left(\frac{[\omega_1 + \omega_2]t}{2}\right) \sin\left(\frac{[\omega_2 - \omega_1]t}{2}\right). \quad (3.54)$$

D’après la forme factorisée, on voit qu’un mouvement oscillatoire à la pulsation $\omega_1 + \omega_2$ est modulé par un terme évoluant à la pulsation plus faible $\omega_2 - \omega_1$; c’est le phénomène de « battements » (Fig. 3.1). Ce phénomène est particulièrement visible quand $\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_1 + \omega_2$, c’est à dire quand les deux pulsations propres sont proches, ce qui correspond à un couplage faible, $k' \ll k$.

3.4 Frottements

Nous avons vu en Sec. 1.3 que les frottements visqueux pouvaient être pris en compte en définissant une fonction de dissipation (Éq. (1.44))

$$D = \frac{1}{2} \sum_{k,l} \Lambda_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l = \frac{1}{2} {}^t \dot{Q} \Lambda \dot{Q}, \quad (3.55)$$

où Λ est une matrice symétrique, qui intervient dans l'équation d'Euler-Lagrange (Éq. (1.45)) comme

$$\frac{d}{dt}(\partial_{\dot{q}_j} L) = \partial_{q_j} L - \partial_{\dot{q}_j} D. \quad (3.56)$$

En écriture vectorielle, cela donne

$$M\ddot{Q} + \Lambda\dot{Q} + KQ = 0. \quad (3.57)$$

On retrouve une équation de la même forme que celle de l'oscillateur harmonique amorti à un degré de liberté (Éq. (2.1)).

En faisant le même changement de variables que précédemment, $Q = M^{-1/2}R$, on arrive à l'équation

$$\ddot{R} + M^{-1/2}\Lambda M^{-1/2}\dot{R} + M^{-1/2}KM^{-1/2}R = 0. \quad (3.58)$$

Si les matrices $M^{-1/2}\Lambda M^{-1/2}$ et $M^{-1/2}KM^{-1/2}$ ne sont pas diagonalisables simultanément (si elles n'ont pas la même matrice de passage), alors on ne peut plus identifier de modes propres. En pratique, si on travaille avec les modes propres de la matrice élastique $M^{-1/2}KM^{-1/2}$, les frottements couplent les différents modes : le système ne restera pas sur un mode propre de cette matrice s'il y est initialisé.

3.5 Oscillations forcées

3.5.1 Forçage des modes propres

Pour étudier la réponse à un forçage, ajoutons un terme source sinusoïdal dans l'équation du mouvement générale sans frottements (3.25) :

$$\ddot{Q}(t) = -AQ(t) + F_0 \cos(\omega t), \quad (3.59)$$

où F_0 est une force généralisée. Décomposons maintenant cette équation sur les modes propres, en commençant par la force :

$$F_0 = \sum_k f_{0k} \phi_k. \quad (3.60)$$

En décomposant $Q(t)$, on obtient la dynamique pour les coefficients des modes propres,

$$\ddot{a}_k(t) = -\omega_k^2 a_k(t) + f_{0k} \cos(\omega t). \quad (3.61)$$

On reconnaît l'équation de l'oscillateur harmonique, non amorti, forcé (Éq. (2.22)).

D'après la section 2.2.1, on sait que la solution est

$$a_k(t) = \frac{f_{0k}}{\omega_k^2 - \omega^2} \cos(\omega t). \quad (3.62)$$

La réponse du mode k est résonnante à sa fréquence propre, ω_k . Comme nous n'avons pas pris de frottements en compte, le gain diverge à la résonance. La phase passe de 0 à π à la résonance : le mode k est en phase avec l'excitation pour $\omega < \omega_k$ et en opposition de phase pour $\omega > \omega_k$.

Si on regarde la réponse d'un degré de liberté, on peut donc s'attendre à une résonance pour toutes les fréquences propres du système. Les modes qui ne contribuent pas sont ceux qui ne sont pas excités ($f_{0k} = 0$) et ceux qui s'annulent sur le degré de liberté en question.

3.5.2 Exemple pour deux degrés de liberté

Reprenons l'exemple des deux systèmes masse-ressort couplés de la section 3.3.2 et considérons un forçage de la masse 1 :

$$F_0 = f_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{f_0}{2} \phi_1 + \frac{f_0}{2} \phi_2. \quad (3.63)$$

Les coefficients des modes valent donc

$$a_1(t) = \frac{f_0}{2} \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} \cos(\omega t), \quad (3.64)$$

$$a_2(t) = \frac{f_0}{2} \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \cos(\omega t). \quad (3.65)$$

Et la solution est

$$Q(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = a_1(t) \phi_1 + a_2(t) \phi_2 = \begin{pmatrix} a_1(t) + a_2(t) \\ a_1(t) - a_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{10} \\ u_{20} \end{pmatrix} \cos(\omega t). \quad (3.66)$$

Regardons en détail la réponse de la masse 1 :

$$u_{10} = \frac{f_0}{2} \left(\frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \right) = \frac{f_0}{2} \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega^2}{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)}. \quad (3.67)$$

Cette réponse est représentée sur la figure 3.2. Comme noté plus haut, il y a une résonnance en ω_1 et une résonnance en ω_2 . Notons que ces résonnances correspondent aux modes propres collectifs du système, et non aux fréquences propres d'un système masse-ressort pris indépendamment. La réponse s'annule pour $\omega = \omega_a = [(\omega_1^2 + \omega_2^2)/2]^{1/2}$, c'est une *anti-résonnance*. Le rapport entre u_{10} et f_0 change de signe à chaque résonnance et à l'anti-résonnance : la réponse est en phase avec l'excitation pour $\omega < \omega_1$ et $\omega_a < \omega < \omega_2$ et en opposition de phase pour $\omega_1 < \omega < \omega_a$ et $\omega > \omega_2$. En l'absence d'amortissement, la phase $\phi(\omega)$ n'est pas une fonction continue. Bien qu'il soit difficile d'écrire une solution explicite en présence d'amortissement, en regardant l'effet qu'il a sur un seul degré de liberté, on peut en déduire qu'il lisserait les résonnances et déplacerait légèrement les fréquences caractéristiques (résonnances et anti-résonnance).

La réponse de la masse 2 est donnée par :

$$u_{20} = \frac{f_0}{2} \left(\frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \right) = \frac{f_0}{2} \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)}. \quad (3.68)$$

Il y a toujours deux résonnances mais plus d'anti-résonnance.

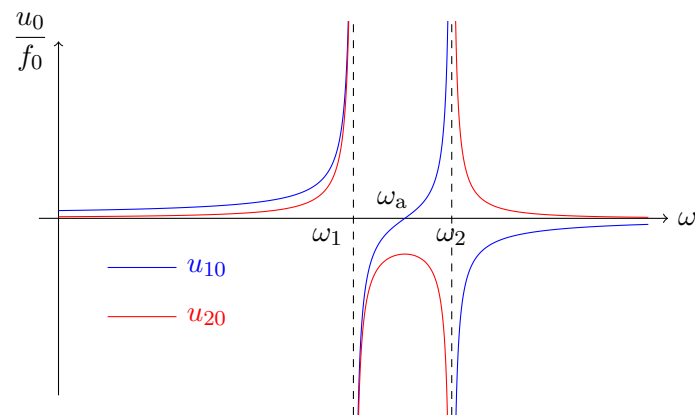


FIGURE 3.2 – Réponse de deux systèmes masse-ressort couplés à un forçage sur la masse 1.

Chapitre 4

Chaîne d'oscillateurs, limite continue

Dans ce chapitre, nous considérons des oscillateurs couplés qui représentent un système étendu spatialement. Nous nous restreignons à des systèmes unidimensionnels.

4.1 Chaîne masses-ressorts

4.1.1 Matrice dynamique

On considère la chaîne masses-ressorts introduite dans la section 3.1.2. N masses m sont libres de se déplacer suivant une direction x et sont reliées par des ressorts de raideur k . Les masses 1 et N sont reliées à un support fixe et les masses j et $j + 1$ sont reliées entre elles pour $j \in \{1, \dots, N - 1\}$. On note u_j le déplacement de la masse j par rapport à sa position de repos.

On utilise le formalisme développé au chapitre précédent. Les énergies cinétique et potentielle sont (Sec. 3.1.2)

$$E_c = \frac{m}{2} \sum_{j=1}^N \dot{u}_j^2, \quad (4.1)$$

$$E_p = k \left(\sum_{j=1}^N u_j^2 - \sum_{j=1}^{N-1} u_j u_{j+1} \right). \quad (4.2)$$

Ces énergies sont quadratiques, on peut donc identifier les matrices $M = m\mathbf{1}$ et

$$K = k \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = -k\Delta_d. \quad (4.3)$$

Où nous avons introduit le « laplacien discret » Δ_d . La matrice dynamique est donc

$$A = M^{-1}K = -\nu_0^2 \Delta_d, \quad (4.4)$$

où $\nu_0 = \sqrt{k/m}$ est la pulsation caractéristique d'un oscillateur individuel, que l'on dénote différemment pour ne pas la confondre avec les pulsations propres.

4.1.2 Modes propres

Nous allons maintenant déterminer les modes propres de la matrice dynamique, ou, de façon équivalente, du laplacien discret. Considérons un mode propre ψ de valeur propre λ : $\Delta_d \psi = \lambda \psi$. L'équation pour chaque composante de ψ s'écrit :

$$\lambda \psi_1 = -2\psi_1 + \psi_2, \quad (4.5)$$

$$\lambda \psi_j = \psi_{j-1} - 2\psi_j + \psi_{j+1}, \quad (4.6)$$

$$\lambda \psi_N = \psi_{N-1} - 2\psi_N. \quad (4.7)$$

L'équation (4.6) est valable pour $2 \leq j \leq N-1$. Cherchons d'abord une solution à cette équation, puis nous verrons comment satisfaire les conditions au bord (en $j=1$ et $j=N$).

Comme l'équation (4.6) est linéaire et invariante par translation, il est naturel de chercher la solution sous la forme d'une exponentielle. C'est ce que nous avons fait en section 2.1.2 pour la solution à l'équation de l'oscillateur harmonique. On cherche donc une solution de la forme

$$\psi_{p,j} = \exp(ipj), \quad (4.8)$$

où p est un paramètre sans dimension proportionnel au nombre d'onde. En l'insérant dans l'équation (4.6), on obtient

$$\lambda_p e^{ipj} = e^{ip(j-1)} - 2e^{ipj} + e^{ip(j+1)} = e^{ipj} 2[\cos(p) - 1]. \quad (4.9)$$

L'exponentielle est bien solution avec la valeur propre

$$\lambda_p = 2[\cos(p) - 1]. \quad (4.10)$$

On voit que les valeurs propres du laplacien discret sont comprises dans l'intervalle $[-2, 0]$, que $\lambda_0 = 0$, et que le comportement à faible nombre d'onde (ou grande longueur d'onde) est

$$\lambda_p \underset{p \rightarrow 0}{\sim} -p^2. \quad (4.11)$$

Dans cette limite, on retrouve les valeurs propres du laplacien continu. Hors de la limite de grande longueur d'onde, l'effet du réseau se fait sentir.

Remarquons que la valeur propre est une fonction paire du nombre d'onde (Éq. (4.10)) : $\lambda_{-p} = \lambda_p$. En conséquence toute combinaison linéaire de $\phi_p = \alpha \psi_p + \beta \psi_{-p}$ est aussi un mode propre du laplacien discret pour la valeur propre λ_p . En particulier, on peut former les combinaisons linéaires $\phi_{p,j} = \cos(pj)$ et $\phi_{p,j} = \sin(pj)$.

Les conditions au bord (4.5, 4.7) peuvent se mettre sous la forme (4.6) en posant $\psi_0 = \psi_{N+1} = 0$. La condition $\psi_0 = \psi_{N+1} = 0$ est donc équivalente aux conditions au bord et doit être satisfaite par les modes propres. La condition $\psi_0 = 0$ impose la combinaison linéaire $\phi_{p,j} = \sin(pj)$, et la condition $\phi_{p,N+1}$ quantifie le nombre d'onde, $p = n\pi/(N+1)$, où n est un entier.

En résumé, nous avons déterminé les modes propres du laplacien discret, et donc de la matrice dynamique,

$$\phi_{p,j} = \sin(pj), \quad (4.12)$$

$$p = \frac{n\pi}{N+1}, \quad (4.13)$$

$$\lambda_p = 2[\cos(p) - 1]. \quad (4.14)$$

La valeur propre correspondante de la matrice dynamique est

$$\omega_p^2 = 2\nu_0^2[1 - \cos(p)]. \quad (4.15)$$

Comme toutes les valeurs entières de n conviennent, il semblerait qu'il y ait une infinité de modes propres ; or, nous savons qu'il y en a N . Certaines valeurs de n ne conviennent donc pas, ou plusieurs valeurs de n correspondent en fait au même mode. Comme $\phi_0 = 0$, la valeur $n = 0$ ne correspond pas à un mode propre. Comme $\phi_{-p} = -\phi_p$, les valeurs n et $-n$ correspondent au même mode propre. Enfin, comme j ne prend que des valeurs entières, n et $n + N + 1$ correspondent au même mode propre. Les entiers correspondants à des modes propres différents sont donc réduits à l'intervalle $n \in \{1, \dots, N\}$: il y en a bien N . Le nombre d'onde p est alors compris dans l'intervalle $[0, \pi]$.

On remarque que les modes propres et valeurs propres dépendent assez peu de la longueur de la chaîne N : les formes des modes (4.12) et des valeurs propres (4.15) sont inchangées, seules les nombres d'onde autorisés changent (Éq. (4.13)).

4.1.3 Zone de Brillouin

Notons ℓ la distance entre les masses de la chaîne à l'équilibre, c'est à dire la taille de la maille du réseau. La position d'équilibre de la masse j est alors ℓj . Réécrivons les modes propres de la chaîne (Éq. (4.12)) en utilisant la position des masses à l'équilibre plutôt que leur indice :

$$\phi_{p,j} = \sin(pj) = \sin\left(\frac{p}{\ell}\ell j\right) = \sin(qx) = \varphi_q(x), \quad (4.16)$$

où $q = p/\ell$ est le *nombre d'onde* ; c'est l'inverse d'une longueur. Il est relié à la longueur d'onde λ par $q = 2\pi/\lambda$. Comme p est compris dans l'intervalle $[0, \pi]$, q est compris dans l'intervalle $[0, \pi/\ell]$, c'est la *zone de Brillouin*.

On note que la valeur la plus petite que peut prendre q est $\pi/[(N+1)\ell] = \pi/L$, où $L = (N+1)\ell$ est la taille du système. Cela correspond à une longueur d'onde $\lambda = 2L$. Les valeurs de q plus petites, c'est à dire les longueurs d'onde plus grandes, ne « rentrent » pas dans le système.

En utilisant le nombre d'onde, les valeurs propres de la matrice dynamique s'écrivent

$$\omega_q^2 = 2\nu_0^2[1 - \cos(\ell q)]. \quad (4.17)$$

Le comportement asymptotique des valeurs propres du laplacien discret à grande longueur d'onde (Éq. (4.11)) devient

$$\omega_q^2 \underset{q \rightarrow 0}{\sim} \nu_0^2 \ell^2 q^2 = c^2 q^2. \quad (4.18)$$

où $c = \nu_0 \ell$ est une vitesse. Ce comportement est observé quand $\ell q \ll 1$, c'est à dire quand la longueur d'onde est grande par rapport à la maille du réseau.

4.2 Autres chaînes

Dans cette section, nous introduisons des variations sur le modèle minimal de chaîne masse-ressorts introduit plus haut, et discutons des différences qui peuvent apparaître.

4.2.1 Chaîne avec liaisons au support

Si on ajoute des ressorts de raideur k' qui relient chaque masse au support, l'énergie potentielle contient le nouveau terme

$$\frac{k'}{2} \sum_{j=1}^N u_j^2 \quad (4.19)$$

et la matrice des raideurs vaut

$$K = -k\Delta_d + k'\mathbf{1}. \quad (4.20)$$

Ces couplages ajoutent donc la matrice $(k'/m)\mathbf{1}$ à la matrice dynamique, ce qui ajoute donc $\nu_0'^2 = k'/m$ à chacune de ses valeurs propres :

$$\omega_q^2 = 2\nu_0^2[1 - \cos(\ell q)] + \nu_0'^2. \quad (4.21)$$

Cette fois, les valeurs propres ne tendent pas vers 0 quand $q \rightarrow 0$, mais vers $\nu_0'^2$.

Cette chaîne peut par exemple être réalisée avec des pendules couplés par des ressorts de raideur h . Si les tiges des pendules sont de longueur h , alors les déplacements des masses, $u_j \simeq h\theta_j$, subissent une force de rappel avec une raideur qui peut être obtenue en écrivant l'énergie potentielle de la masse j :

$$E_{p,j} \simeq \frac{mgh}{2} \theta_j^2 = \frac{mg}{2h} u_j^2, \quad (4.22)$$

ce qui correspond à une raideur $k' = mg/h$.

4.2.2 Déplacements transverses

Nous n'avons pour l'instant considéré que des déformations *longitudinales* de la chaîne, c'est à dire des déformations dans la direction de la chaîne elle-même. Supposons maintenant que les masses puissent se déplacer dans une direction *transverse*, et notons v_j le déplacement de la masse j dans cette direction.

Il est immédiat d'écrire l'énergie cinétique du système :

$$E_c = \frac{m}{2} \sum_{j=1}^N (\dot{u}_j^2 + \dot{v}_j^2). \quad (4.23)$$

Pour écrire l'énergie potentielle, il vaut mieux repartir de l'énergie potentielle d'un ressort de raideur k et de longueur de repos ℓ_0 . La position de la masse j est donnée par $(\ell j + u_j, v_j)$. Pour simplifier l'écriture, introduisons les masses 0 et $N+1$, dont les déplacements sont fixés à 0. L'énergie potentielle totale est donc

$$E_p = \frac{k}{2} \sum_{j=0}^N (d_j - \ell_0)^2, \quad (4.24)$$

où d_j est la distance entre les masses j et $j+1$. Elle est donnée par

$$d_j = \sqrt{[\ell(j+1) + u_{j+1} - (\ell j + u_j)]^2 + (v_{j+1} - v_j)^2} = \sqrt{(\ell + u_{j+1} - u_j)^2 + (v_{j+1} - v_j)^2}. \quad (4.25)$$

Utilisons maintenant un développement de Taylor pour écrire les distances puis l'énergie potentielle

à l'ordre 2 en les déplacements. Pour les distances,

$$d_j = \sqrt{\ell^2 + 2\ell(u_{j+1} - u_j) + (u_{j+1} - u_j)^2 + (v_{j+1} - v_j)^2}, \quad (4.26)$$

$$= \ell \sqrt{1 + \frac{2(u_{j+1} - u_j)}{\ell} + \frac{(u_{j+1} - u_j)^2 + (v_{j+1} - v_j)^2}{\ell^2}} \quad (4.27)$$

$$= \ell \left[1 + \frac{u_{j+1} - u_j}{\ell} + \frac{(v_{j+1} - v_j)^2}{2\ell^2} \right] + \mathcal{O}(u^3, v^3) \quad (4.28)$$

$$\simeq \ell + u_{j+1} - u_j + \frac{(v_{j+1} - v_j)^2}{2\ell}. \quad (4.29)$$

Nous avons utilisé le développement de Taylor $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathcal{O}(x^3)$. Nous avons utilisé la notation $\simeq$, plus légère que l'écriture de $\mathcal{O}(u^3, v^3)$.

La contribution du ressort entre les masses j et $j+1$ à l'énergie potentielle est donc

$$E_{p,j} = \frac{k}{2} (d_j - \ell_0)^2 \quad (4.30)$$

$$\simeq \frac{k}{2} \left[\ell + u_{j+1} - u_j + \frac{(v_{j+1} - v_j)^2}{2\ell} - \ell_0 \right]^2 \quad (4.31)$$

$$\simeq \frac{k}{2} \left[(\ell - \ell_0)^2 + 2(\ell - \ell_0)(u_{j+1} - u_j) + (u_{j+1} - u_j)^2 + \frac{\ell - \ell_0}{\ell} (v_{j+1} - v_j)^2 \right]. \quad (4.32)$$

En sommant sur j , on obtient l'énergie potentielle totale :

$$E_p = \sum_{j=0}^N E_{p,j} = \frac{N+1}{2} k (\ell - \ell_0)^2 + \frac{k}{2} \sum_{j=0}^N (u_{j+1} - u_j)^2 + \frac{k(\ell - \ell_0)}{2\ell} \sum_{j=0}^N (v_{j+1} - v_j)^2. \quad (4.33)$$

Les termes linéaires en u s'annulent. Le premier terme ne dépend pas des déplacements ; c'est une constante qui n'affecte pas la dynamique du système. Sans déplacements transverses, ce résultat confirme l'expression utilisée précédemment pour l'énergie de la chaîne masses-ressorts, qui ne fait intervenir que les déplacements par rapport à la position d'équilibre, mais pas la distance entre les masses à l'équilibre ni la longueur à vide des ressorts.

Le dernier terme représente la contribution des déplacements transverses. Elle est de la même forme que celle des déplacements longitudinaux, mais avec une raideur effective $k(\ell - \ell_0)/\ell$, qui n'est positive que si la chaîne est tendue, c'est à dire si $\ell > \ell_0$. La tension dans la chaîne, c'est à dire la force exercée par les ressorts à l'équilibre, est $T = k(\ell - \ell_0)$. Dans le cas le plus courant, $(\ell - \ell_0)/\ell \ll 1$, et les déplacements transverses sont donc beaucoup plus « mous » que les déplacements longitudinaux.

Comme les énergies cinétique et potentielle des déplacements transverses sont de la même forme que celles des déplacements longitudinaux, les résultats obtenus pour les déplacements longitudinaux s'appliquent aussi aux déplacements transverses en utilisant la raideur effective.

Enfin, rappelons que d'après la forme des énergies cinétique et potentielle, les déplacements longitudinaux et transverses sont indépendants.

4.2.3 Chaîne diatomique

Considérons maintenant une chaîne masses-ressorts « diatomique », où tous les ressorts ont la même raideur k mais où les « atomes » d'indice impair ont la masse m_1 et ceux d'indice pair la masse m_2 . On suppose cette fois qu'il y a en tout $2N$ atomes. On se restreint à nouveau aux déplacements longitudinaux $(u_j)_{1 \leq j \leq 2N}$.

Matrice dynamique. L'énergie potentielle et la matrice K sont inchangées (Éqs. (4.2, 4.3)). L'énergie cinétique est donnée par

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2N} m_j \dot{u}_j^2, \quad (4.34)$$

où m_j désigne la masse de l'atome j . La matrice M est donc donnée par

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \cdots & & \\ 0 & m_2 & 0 & \cdots & \\ \vdots & 0 & m_1 & 0 & \cdots \\ & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

La matrice dynamique est toujours donnée par $A = M^{-1}K = -kM^{-1}\Delta_d$.

Modes propres. Un mode propre ψ pour la valeur propre ω^2 vérifie

$$\omega^2 M\psi = -k\Delta_d\psi. \quad (4.36)$$

Écrivons l'équation pour la composante l'atome j :

$$\omega^2 m_j \psi_j = -k(\Delta_d\psi)_j = k(2\psi_j - \psi_{j-1} - \psi_{j+1}). \quad (4.37)$$

Il est facile de voir que la forme $\psi_j = \sin(pj)$ obtenue dans le cas de la chaîne « monoatomique » ne convient pas si $m_1 \neq m_2$. Néanmoins, on peut utiliser cette forme en introduisant une modulation :

$$\psi_j = a_j \sin(pj), \quad (4.38)$$

où a_j ne dépend que de la parité de j . On peut alors calculer

$$2\psi_j - \psi_{j-1} - \psi_{j+1} = 2a_j \sin(pj) - a_{j+1}[\sin(p[j-1]) + \sin(p[j+1])] \quad (4.39)$$

$$= 2[a_j - a_{j+1} \cos(p)] \sin(pj). \quad (4.40)$$

Dans l'équation (4.37), on obtient donc

$$\omega^2 m_j a_j = 2k[a_j - a_{j+1} \cos(p)]. \quad (4.41)$$

En écrivant cette équation pour $j = 1$ et $j = 2$ on obtient

$$\frac{\omega^2}{2k} = \frac{1 - \frac{a_2}{a_1} \cos(p)}{m_1} = \frac{1 - \frac{a_1}{a_2} \cos(p)}{m_2}. \quad (4.42)$$

En notant $\alpha = a_2/a_1$ et $\mu = m_2/m_1$, on arrive à l'équation pour α :

$$\mu[1 - \alpha \cos(p)] = 1 - \alpha^{-1} \cos(p), \quad (4.43)$$

qui est une équation polynomiale de degré 2 :

$$\mu\alpha^2 + (1 - \mu)\alpha - c = 0, \quad (4.44)$$

où nous avons introduit $c = \cos(p)$. Son discriminant est positif et ses solutions sont

$$\alpha_{\pm} = \frac{\mu - 1 \pm \sqrt{(\mu - 1)^2 + 4\mu c^2}}{2\mu c}. \quad (4.45)$$

Les valeurs propres correspondantes sont

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{2k}{m_1}(1 - \alpha_{\pm}c) = k \left[\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \mp \sqrt{\left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right)^2 + \frac{4c^2}{m_1 m_2}} \right]. \quad (4.46)$$

Nombre de modes propres, zone de Brillouin. Pour chaque valeur de p , nous avons donc trouvé deux modes propres, caractérisés par deux valeurs différentes de α . Comme nous l'avons vu pour la chaîne simple, les valeurs de p sont de la forme $p = n\pi/(2N + 1)$, où $n \in \{1, \dots, 2N\}$. On a donc l'impression d'avoir trouvé $4N$ modes propres, alors qu'il devrait y en avoir $2N$, comme le nombre de degrés de liberté. Cela signifie que des modes propres ont été comptés deux fois. En effet, si on change n en $2N + 1 - n$, on change p en $\pi - p$ et $c = \cos(p)$ en $-c$. Les valeurs propres sont inchangées et les coefficients $\alpha_{\pm}$ sont changés en $-\alpha_{\pm}$. Regardons ce que devient le mode propre ψ de paramètres p et α :

$$\psi_{\pi-p,j} = a_{\pi-p,j} \sin([\pi - p]j). \quad (4.47)$$

Le deuxième terme donne

$$\sin([\pi - p]j) = -\cos(\pi j) \sin(pj) = (-1)^{j+1} \sin(pj). \quad (4.48)$$

Pour le premier terme, comme $\alpha = a_2/a_1$ est changé en $-\alpha$, cela signifie qu'un coefficient a_j sur deux change de signe ; peut importe lequel, car les modes propres sont définis à un coefficient près. Supposons que les termes pairs changent de signe, c'est à dire

$$a_{\pi-p,j} = (-1)^{j+1} a_{p,j}. \quad (4.49)$$

En regroupant les deux termes, on obtient

$$\psi_{\pi-p,j} = a_{p,j} \sin(pj) = \psi_{p,j}. \quad (4.50)$$

Cela signifie que les modes de vecteurs d'onde p et $\pi - p$ sont les mêmes, et donc qu'on peut restreindre n à $\{1, \dots, N\}$ et p à $[0, \pi/2]$. Nous avons donc trouvé les $2N$ modes propres du système.

Le nombre d'onde dimensionné correspondant à p est

$$q = \frac{p}{\ell} \in \left[0, \frac{\pi}{2\ell}\right]. \quad (4.51)$$

Nous avons vu pour la chaîne simple que le nombre d'onde était compris entre 0 et π/d , où d est la maille du réseau. C'est cohérent car la maille du réseau est $d = 2\ell$ pour la chaîne diatomique.

Comportement asymptotique, branches acoustique et optique. Discutons la forme des modes propres et des valeurs propres. Les signes des coefficients de modulation sont $\alpha_+ > 0$ et $\alpha_- < 0$: les atomes voisins vibrent « en phase » pour les modes $+$ et en opposition de phase pour les modes $-$. On s'attend donc à avoir des valeurs propres plus grandes pour les modes $-$, et c'est bien le cas : $\omega_+^2 < \omega_-^2$.

On peut étudier le comportement asymptotique à grande longueur d'onde, $p \rightarrow 0$ ou $c = \cos(p) \rightarrow 1$. Dans ce cas, on trouve que $\omega_+^2 \rightarrow 0$, comme pour la chaîne simple, alors que $\omega_-^2 \rightarrow 2k(m_1^{-1} + m_2^{-1})$; c'est en fait son maximum. Plus précisément, on peut faire le développement de Taylor de ω_+^2 , avec $c \simeq 1 - p^2/2$ et $c^2 \simeq 1 - p^2$. En introduisant $m = (m_1^{-1} + m_2^{-1})^{-1} = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$, on a

$$\omega_+^2 \simeq k \left[\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - \sqrt{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^2 - \frac{4p^2}{m_1 m_2}} \right] \quad (4.52)$$

$$= \frac{k}{m} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_1 m_2} p^2} \right) \quad (4.53)$$

$$\simeq \frac{2km}{m_1 m_2} p^2 \quad (4.54)$$

$$= \frac{2k}{m_1 + m_2} p^2. \quad (4.55)$$

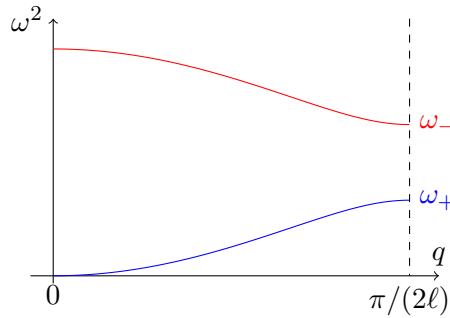


FIGURE 4.1 – Relation de dispersion de la chaîne diatomique, branches acoustique (ω_+) et optique (ω_-).

Comme on pouvait s'y attendre, la valeur propre n'est sensible qu'à la moyenne des masses : les grandes longueurs d'onde ne « voient » pas la nature diatomique du réseau.

On parle des modes + et – comme de *branches*, en références aux lignes qu'ils forment quand on trace la relation de dispersion. La branche + est dite *branche acoustique* car elle correspond à un mouvement « collectif » des atomes à l'échelle de la maille. La branche – est appelée *branche optique* car elle peut être excitée à haute fréquence, typiquement par des ondes électromagnétiques dans le domaine de l'infrarouge pour des réseaux cristallins. Ces branches sont tracées sur la figure 4.1.

4.3 Limite continue

Nous avons obtenu une description exacte assez complète du comportement de chaînes masses-ressorts. Cependant, cette description peut parfois être difficile à manipuler, par exemple pour décrire la propagation d'une perturbation localisée ou la réponse à un forçage. Pour cela, cherchons à obtenir une description simplifiée de ces systèmes à une échelle grande devant la maille du réseau. Dans cette limite, les déplacements u_j peuvent être représentés par une fonction continue $u(x)$, dont on cherche à prédire l'évolution ; c'est ce qu'on appelle la *limite continue*.

Il y a deux façons de voir la limite continue, qui ont des significations physiques distinctes. Dans la première, on considère une maille de taille d fixée et on se place à des échelles grandes devant cette taille, ou à des nombres d'onde q tels que $qd \ll 1$. On cherche ainsi à obtenir une description continue en fonction des paramètres microscopiques du système, par exemple $\ell = d$, k et m pour la chaîne simple. Avec le deuxième point de vue, on considère un système de taille L fixée, ou des nombres d'onde q fixés, et on fait tendre la taille de la maille d vers 0. Pour aboutir à une description cohérente, on doit alors faire évoluer les paramètres microscopiques k et m avec d ; cela requiert d'introduire de nouveaux paramètres qui décrivent le milieu continu, comme sa masse volumique ou sa « raideur ». Le premier point de vue correspond plutôt à la situation où on connaît le système à un niveau microscopique et où on veut en déduire son comportement macroscopique. Le deuxième correspond au cas où le modèle microscopique est introduit par commodité mais n'a pas de réalité physique. Quand on fait les calculs, les deux points de vue sont presque équivalents.

Nous avons utilisé différentes descriptions équivalentes des systèmes étudiés : les équations du mouvement, les énergies cinétique et potentielle, ou le lagrangien, et les modes propres et leurs valeurs propres. La limite continue peut être prise pour chacune de ces descriptions. Nous allons commencer par les modes propres avant de passer aux équations du mouvement et enfin aux énergies cinétiques et potentielles, en prenant soin de vérifier la cohérence des résultats.

4.3.1 Modes propres et valeurs propres

Partons des modes propres et des valeurs propres pour la chaîne simple, écrits avec le nombre d'onde dimensionné q et la notation continue pour la variable d'espace :

$$\varphi_q(x) = \sin(qx), \quad (4.56)$$

$$\omega_q^2 = 2\nu_0^2[1 - \cos(\ell q)]. \quad (4.57)$$

Comme nous l'avons déjà remarqué, dans la limite $\ell q \ll 1$, la relation de dispersion devient

$$\omega_q^2 \simeq \nu_0^2 \ell^2 q^2 = c^2 q^2, \quad (4.58)$$

où $c = \nu_0 \ell = \ell \sqrt{k/m}$ est une vitesse. Nous avons obtenu la relation de dispersion en fonction des paramètres microscopiques. On note que les paramètres microscopiques n'interviennent pas de façon indépendante mais seulement à travers la combinaison $\ell \sqrt{k/m}$. Cela signifie que si on ne peut sonder le système qu'aux grandes longueurs d'ondes, on ne pourra pas déterminer chacun des paramètres mais seulement cette combinaison.

Si on se place à nombre d'onde q fixé et qu'on veut faire tendre la taille de la maille ℓ vers 0, il faut que la vitesse c reste constante (ou, au moins, tende vers une constante) pour que la limite continue soit bien définie. On peut aussi imposer que la masse totale du système reste constante, c'est à dire fixer la masse « volumique » $\rho = m/\ell$. Ainsi, quand ℓ tend vers 0, $m = \rho \ell$ tend aussi vers 0. En imposant la vitesse c et la masse volumique ρ , on impose aussi la raideur

$$k = \frac{c^2 m}{\ell^2} = \frac{c^2 \rho}{\ell} = \frac{\kappa}{\ell}, \quad (4.59)$$

où κ représente la raideur du milieu. Contrairement à la masse, la raideur des ressorts doit augmenter quand la masse diminue. La vitesse de la relation de dispersion peut maintenant être écrite en fonction des paramètres effectifs :

$$c = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}}. \quad (4.60)$$

4.3.2 Équations du mouvement

La relation de dispersion nous a permis de déterminer que le comportement à grande échelle était caractérisé par une vitesse et quelle combinaison de paramètres microscopiques ou effectifs elle faisait intervenir. Voyons maintenant quelle est l'équation d'évolution des déplacements continus.

Partons de l'équation du mouvement linéaire générale (3.24), $M\ddot{Q} = -KQ$, et appliquons-la aux déplacements u_j et aux matrices $M = m\mathbf{1}$ et K (Éq. (4.3)) de la chaîne simple. On obtient

$$m\ddot{u}_j = k[u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}]. \quad (4.61)$$

Utilisons maintenant l'écriture continue, $u_j = u(\ell j)$, supposons que les déplacements varient assez peu à l'échelle de la maille et faisons un développement de Taylor :

$$u_{j\pm 1} = u(\ell[j \pm 1]) \simeq u(\ell j) \pm \ell \partial_x u(\ell j) + \frac{\ell^2}{2} \partial_x^2 u(\ell j). \quad (4.62)$$

Dans l'équation du mouvement, les dérivées première s'annulent et il reste

$$m\ddot{u}(\ell j) = k\ell^2 \partial_x^2 u(\ell j). \quad (4.63)$$

On peut se débarrasser des indices et noter les dérivées spatiale et temporelle de la même façon :

$$\partial_t^2 u(x, t) = c^2 \partial_x^2 u(x, t), \quad (4.64)$$

où c est la vitesse définie à partir des modes propres. Cette équation est l'*équation des ondes*, aussi appelée *équation de d'Alembert*.

Au-delà de la vitesse, l'équation des ondes correspond aussi à la relation de dispersion (4.58) : les modes propres du laplacien continu ∂_x^2 sont bien les ondes planes, $\phi_q(x) = \sin(qx)$, avec leurs valeurs propres $-q^2$. Dans l'équation des ondes, on peut identifier la matrice dynamique $A = -c^2 \partial_x^2$; dans la description continue, c'est un opérateur différentiel.

4.3.3 Chaîne avec liaisons au support

Nous avons vu que l'introduction de liaisons au support avec une raideur k' dans la chaîne modifiait la relation de dispersion qui devient, dans la limite $\ell q \ll 1$,

$$\omega_q^2 \simeq \nu_0^2 \ell^2 q^2 + \nu_0'^2 = c^2 q^2 + \nu_0'^2, \quad (4.65)$$

où $\nu_0'^2 = k'/m$.

L'équation du mouvement est donnée par

$$m\ddot{u}_j = k[u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}] - k'u_j. \quad (4.66)$$

En suivant la même méthode que précédemment, on trouve la limite continue

$$\partial_t^2 u(x, t) = c^2 \partial_x^2 u(x, t) - \nu_0'^2 u(x, t). \quad (4.67)$$

La présence du dernier terme peut introduire une différence qualitative dans le comportement, comme nous allons le voir.

4.3.4 Énergies cinétique et potentielle

Finalement, montrons que les énergies cinétique et potentielle ont une forme simple dans la limite continue. C'est immédiat pour l'énergie cinétique (4.1) :

$$E_c = \frac{m}{2} \sum_{j=1}^N \dot{u}_j^2 \simeq \frac{m}{2\ell} \int_0^L [\partial_t u(x, t)]^2 dx = \frac{\rho}{2} \int_0^L [\partial_t u(x, t)]^2 dx. \quad (4.68)$$

Pour l'énergie potentielle, introduisons les déplacements $u_0 = u_{N+1} = 0$; elle s'écrit alors (Éq. (3.5))

$$E_p = \frac{k}{2} \sum_{j=0}^N (u_{j+1} - u_j)^2 \simeq \frac{k\ell^2}{2} \sum_{j=0}^N [\partial_x u(\ell j)]^2 \simeq \frac{\kappa}{2} \int_0^L [\partial_x u(x)]^2 dx. \quad (4.69)$$

Comme attendu, les énergies cinétique et potentielle prennent une forme simple qui ne dépend que des paramètres du milieu continu, ρ et κ .

Le lagrangien du système continu s'écrit donc $L = E_c - E_p$. Pour montrer qu'il est cohérent avec l'équation des ondes, il faut utiliser l'équation d'Euler-Lagrange (1.23). Cette équation n'est pas évidente à appliquer à une fonction continue ; nous esquissons ici ce calcul, qui dépasse le cadre de ce cours. Pour calculer les *dérivées fonctionnelles* $\partial_{u(x)} L$ et $\partial_{\dot{u}(x)} L$, il faut commencer par écrire

$$L[u, \dot{u}] = \int_0^L \mathcal{L}(u(x), \dot{u}(x)) dx. \quad (4.70)$$

Ici,

$$\mathcal{L}(f(x), g(x)) = \frac{\rho}{2}g(x)^2 - \frac{\kappa}{2}[\partial_x f(x)]^2. \quad (4.71)$$

Puis il faut calculer le lagrangien au premier ordre en présence de perturbations indépendantes sur u et $\dot{u}$:

$$L[u + \epsilon, \dot{u} + \eta] = \int_0^L \mathcal{L}(u(x) + \epsilon(x), \dot{u}(x) + \eta(x)) dx \quad (4.72)$$

$$= \int_0^L \left(\frac{\rho}{2}[\dot{u}(x) + \eta(x)]^2 - \frac{\kappa}{2}[\partial_x u(x) + \partial_x \epsilon(x)]^2 \right) dx \quad (4.73)$$

$$\simeq L[u, \dot{u}] + \int_0^L [\rho \dot{u}(x) \eta(x) - \kappa \partial_x u(x) \partial_x \epsilon(x)] dx. \quad (4.74)$$

Le deuxième terme dans l'intégrale donne

$$\partial_{\dot{u}(x)} L = \rho \dot{u}(x). \quad (4.75)$$

Pour obtenir $\partial_{u(x)} L$, il faut faire une intégration par parties du deuxième terme :

$$- \int_0^L \kappa \partial_x u(x) \partial_x \epsilon(x) dx = \int_0^L \kappa \partial_x^2 u(x) \epsilon(x) dx. \quad (4.76)$$

Cela donne

$$\partial_{u(x)} L = \kappa \partial_x^2 u(x). \quad (4.77)$$

On peut maintenant utiliser l'équation d'Euler-Lagrange

$$\partial_t [\partial_{\dot{u}(x)} L] = \partial_{u(x)} L, \quad (4.78)$$

qui donne

$$\rho \partial_t^2 u(x, t) = \kappa \partial_x^2 u(x, t), \quad (4.79)$$

ce qui est bien l'équation des ondes.

4.3.5 Puissance transmise

Les bilans énergétiques peuvent être utiles. Pour cela, il faut savoir quelle puissance est transmise par un ressort dans une chaîne, et comment celle-ci s'écrit dans la limite continue.

La force exercée sur l'atome $j + 1$ par le ressort de raideur k la reliant à l'atome j est

$$f_j = k(u_j - u_{j+1}) \simeq -k\ell \partial_x u(\ell j). \quad (4.80)$$

La puissance de cette force est

$$P_j = f_j \dot{u}_{j+1} = k(u_j - u_{j+1}) \dot{u}_{j+1} \simeq -\kappa \partial_x u(\ell j) \partial_t u(\ell j). \quad (4.81)$$

Nous avons utilisé le fait qu'à l'ordre dominant, $\partial_t u(\ell[j + 1]) \simeq \partial_t u(\ell j)$. Dans la limite continue, la puissance transmise en x par la partie « gauche » de la chaîne sur la partie « droite » est

$$P(x, t) = -\kappa \partial_x u(x, t) \partial_t u(x, t). \quad (4.82)$$

Cette expression ne dépend pas de l'équation du mouvement de la chaîne.

Dans la limite continue, les déplacements de la chaîne masses-ressorts obéissent à l'équation des ondes (4.64) et nous avons déterminé l'énergie mécanique :

$$E_m(t) = E_c(t) + E_p(t) = \frac{1}{2} \int_a^b \left(\rho [\partial_t u(x,t)]^2 + \kappa [\partial_x u(x,t)]^2 \right) dx. \quad (4.83)$$

Nous avons ici écrit l'énergie mécanique du segment $[a,b]$ de la chaîne. Calculons l'évolution temporelle de l'énergie mécanique, en utilisant l'équation des ondes :

$$\frac{dE_m}{dt}(t) = \int_a^b \left[\rho \partial_t u(x,t) \partial_t^2 u(x,t) + \kappa \partial_x u(x,t) \partial_x \partial_t u(x,t) \right] dx \quad (4.84)$$

$$= \kappa \int_a^b \left[\partial_t u(x,t) \partial_x^2 u(x,t) + \partial_x u(x,t) \partial_x \partial_t u(x,t) \right] dx \quad (4.85)$$

$$= \kappa \int_a^b \partial_x [\partial_t u(x,t) \partial_x u(x,t)] dx \quad (4.86)$$

$$= - \int_a^b \partial_x P(x,t) dx \quad (4.87)$$

$$= P(a,t) - P(b,t). \quad (4.88)$$

On obtient le résultat attendu : la variation d'énergie mécanique est égale à la puissance reçue de la « gauche » moins celle « donnée » à la « droite ».

On remarque qu'on peut aussi écrire cette relation sous la forme d'une équation de conservation. Il faut pour cela définir la densité d'énergie mécanique,

$$e_m(x,t) = \frac{\rho}{2} [\partial_t u(x,t)]^2 + \frac{\kappa}{2} [\partial_x u(x,t)]^2. \quad (4.89)$$

En suivant les mêmes étapes, on arrive à

$$\partial_t e_m(x,t) = -\partial_x P(x,t). \quad (4.90)$$

Dans cette équation, l'évolution de la densité d'une quantité conservée (l'énergie mécanique) est égale à moins la divergence du flux correspondant (la puissance).

4.3.6 Interfaces

Nous avons vu en détail comment obtenir la description continue dans un milieu homogène. On cherche ici à décrire ce qui se passe à l'interface entre deux milieux homogènes. Considérons une chaîne d'atomes placés aux positions ℓj , $j \in \mathbb{Z}$. Pour $j < 0$, les atomes ont une masse m_1 et les ressorts ont une raideur k_1 . Pour $j \geq 0$, les atomes ont une masse m_2 et les ressorts ont une raideur k_2 . Le ressort entre l'atome $j = -1$ de masse m_1 et l'atome $j = 0$ de masse m_2 a une raideur k_1 .

Dans la limite continue, le déplacement $u(x,t)$ vérifie l'équation des ondes avec la vitesse $c_1 = \ell \sqrt{k_1/m_1}$ pour $x < 0$ et avec la vitesse $c_2 = \ell \sqrt{k_2/m_2}$ pour $x > 0$. On cherche à déterminer les conditions que doit vérifier le déplacement en $x = 0$. La première, pour que le déplacement soit correctement défini en $x = 0$, est qu'il doit être continu :

$$u(0^-,t) = u(0^+,t). \quad (4.91)$$

Comme l'équation des ondes est du second ordre en espace, une autre condition est nécessaire. Pour l'obtenir, écrivons l'équation du mouvement de l'atome $j = 0$:

$$m \ddot{u}_0 = k_1(u_{-1} - u_0) + k_2(u_1 - u_0). \quad (4.92)$$

Avec un développement de Taylor à l'ordre 2, on obtient :

$$m_2 \partial_t^2 u(0, t) \simeq \ell [k_2 \partial_x u(0^+, t) - k_1 \partial_x u(0^-, t)] + \frac{\ell^2}{2} [k_1 \partial_x^2 u(0^-, t) + k_2 \partial_x^2 u(0^+, t)]. \quad (4.93)$$

Avec $m_j = \rho_j \ell$ et $k_j = \kappa_j / \ell$, on a

$$\rho_2 \partial_t^2 u(0, t) \simeq \ell^{-1} [\kappa_2 \partial_x u(0^+, t) - \kappa_1 \partial_x u(0^-, t)] + \frac{1}{2} [\kappa_1 \partial_x^2 u(0^-, t) + \kappa_2 \partial_x^2 u(0^+, t)]. \quad (4.94)$$

Si on veut prendre la limite $\ell \rightarrow 0$ comme nous l'avons fait pour prendre la limite continue, on voit qu'il faut que les dérivées premières s'annulent, c'est à dire que

$$k_1 \partial_x u(0^-, t) = k_2 \partial_x u(0^+, t). \quad (4.95)$$

C'est la deuxième condition recherchée.

Chapitre 5

Ondes progressives

Dans ce chapitre, nous discutons les propriétés des ondes qui peuvent apparaître dans les systèmes étendus étudiés au chapitre précédent. Nous montrons comment des ondes progressives peuvent se propager en milieu infini, être générées par un forçage, et se comporter au passage d'une interface. Certains résultats sont obtenus pour une relation de dispersion générale, d'autres pour le cas particulier d'un milieu régi par l'équation des ondes.

5.1 Ondes stationnaires et progressives

5.1.1 Ondes stationnaires

Commençons par un système défini sur l'intervalle $[0, L]$ et avec un déplacement nul imposé aux bords, $u(0, t) = u(L, t) = 0$; ce sont des *conditions aux limites de Dirichlet*. Ces conditions ont été utilisées au chapitre précédent.

Nous avons identifié les modes propres $\phi_q(x) = \sin(qx)$ et les valeurs propres correspondantes ω_q^2 , qui dépendent du système. Pour satisfaire la condition au bord en L , il faut que $\phi_q(L) = \sin(qL) = 0$, soit $q = n\pi/L$, avec n un entier positif. D'après la solution générale décrite en Sec. 3.3, toute solution de l'équation des ondes sur cet intervalle peut s'écrire

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n \cos(\omega_n t) + \beta_n \sin(\omega_n t)] \sin(q_n x), \quad (5.1)$$

où $q_n = n\pi/L$ et $\omega_n = cq_n = cn\pi/L$.

Chacun des termes de la somme est une *onde stationnaire* : c'est le produit d'un profil qui ne dépend que de la position x par un terme sinusoïdal qui ne dépend que du temps. Les points où l'amplitude est nulle (les nœuds) ou ceux où elle est maximale, ne se déplacent pas.

5.1.2 Ondes progressives

On peut utiliser les relations trigonométriques pour réécrire, par exemple,

$$\sin(\omega_n t) \sin(q_n x) = \frac{1}{2} [\cos(\omega_n t - q_n x) - \cos(\omega_n t + q_n x)]. \quad (5.2)$$

Le premier terme de cette somme peut s'écrire

$$\cos(\omega_n t - q_n x) = \cos\left(q_n \left[\frac{\omega_n}{q_n} t - x\right]\right) = \cos(q_n [v_n t - x]). \quad (5.3)$$

Il décrit une *onde progressive* qui se déplace à la vitesse $v_n = \omega_n/q_n$, qui est appelée *vitesse de phase*. Le deuxième terme de l'équation (5.2) décrit une onde progressive qui se déplace à la vitesse $-v_n$. Ainsi, une onde stationnaire peut s'écrire comme la somme de deux ondes progressives de vitesses opposées.

Réciproquement, une onde progressive harmonique (sinusoïdale) peut s'écrire

$$\cos(\omega t - qx) = \cos(\omega t) \cos(qx) - \sin(\omega t) \sin(qx). \quad (5.4)$$

Le premier terme ne satisfait pas les conditions aux bord, c'est à dire qu'une onde progressive ne peut pas exister dans un milieu borné. Mais si on suppose le milieu infini et invariant par translation, alors $\cos(qx)$ est un mode propre au même titre que $\sin(qx)$ et l'onde progressive peut s'écrire comme la somme de deux ondes stationnaires. Dans un système linéaire, cela montre que l'onde progressive est aussi solution de l'équation de propagation.

5.1.3 Vitesses de phase et de groupe

Nous avons vu qu'une onde progressive de nombre d'onde q se déplaçait à la vitesse de phase $v_\varphi(q) = \omega_q/q$. Si les ondes suivent l'équation des ondes, qui correspond à la relation de dispersion $\omega_q = cq$, alors la vitesse de phase vaut $v_\varphi = c$, indépendamment du nombre d'onde q .

Considérons maintenant un *paquet d'ondes*, c'est à dire la superposition d'ondes progressives harmoniques de nombres d'onde proches de q_0 :

$$u(x,t) = \int \tilde{u}(q) \cos(\omega_q t - qx) dq, \quad (5.5)$$

où $\tilde{u}(q)$ est une distribution centrée sur q_0 . Plus spécifiquement, si on prend une distribution gaussienne d'écart-type σ centrée sur q_0 ,

$$\tilde{u}(q) = a \exp\left(-\frac{(q - q_0^2)}{2\sigma^2}\right), \quad (5.6)$$

alors, à l'instant $t = 0$,

$$u(x,0) = \sqrt{2\pi} a \sigma e^{-\sigma^2 x^2 / 2t} \cos(q_0 x). \quad (5.7)$$

Cela décrit une onde sinusoïdale de nombre d'onde q_0 avec enveloppe gaussienne de largeur σ^{-1} .

Si le milieu suit l'équation des ondes, alors toutes les ondes qui composent le paquet se déplacent à la même vitesse c et le paquet lui-même se déplace à la vitesse c , en gardant la même forme au cours du temps. Dans ce cas, le milieu est dit *non-dispersif*. Si, au contraire, la vitesse de phase $v_\varphi(q) = \omega_q/q$ dépend du nombre d'onde q , le paquet est déformé au cours de la propagation. Pour cette raison, un tel milieu est dit *dispersif*.

Si la largeur spectrale σ du paquet d'onde est faible, les ondes qui composent le paquet ont approximativement la même vitesse $v_\varphi(q) \simeq v_\varphi(q_0)$ et le paquet se déforme lentement. On peut alors se demander quelle est la vitesse de déplacement du paquet. Pour cela, réécrivons le cosinus dans l'expression (5.5) du paquet d'ondes :

$$\cos(\omega_q t - qx) = \cos(\omega_{q_0} t - q_0 x + [\omega_q - \omega_{q_0}]t - [q - q_0]x) \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} &= \cos(\omega_{q_0} t - q_0 x) \cos([\omega_q - \omega_{q_0}]t - [q - q_0]x) \\ &\quad - \sin(\omega_{q_0} t - q_0 x) \sin([\omega_q - \omega_{q_0}]t - [q - q_0]x) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Les deux termes peuvent être traités séparément et nous nous contenterons du premier, qui entre dans l'expression du paquet d'ondes comme

$$u_1(x, t) = \int \tilde{u}(q) \cos(\omega_{q_0} t - q_0 x) \cos([\omega_q - \omega_{q_0}]t - [q - q_0]x) dq, \quad (5.10)$$

$$\simeq \cos(\omega_{q_0} t - q_0 x) \int \tilde{u}(q) \cos([q - q_0] [\partial_q \omega(q_0) t - x]) dq \quad (5.11)$$

Le terme hors de l'intégrale représente la phase de l'onde et se déplace à la vitesse $v_\varphi(q_0)$. Le deuxième terme représente l'enveloppe ; avec l'approximation $\omega_q - \omega_{q_0} \simeq (q - q_0) \partial_q \omega(q_0)$, il ne dépend de l'espace et du temps que via la combinaison $\partial_q \omega(q_0) t - x$. Il décrit donc une translation à la *vitesse de groupe*

$$v_g(q) = \partial_q \omega(q_0). \quad (5.12)$$

Bien sûr, dans un milieu non-dispersif, $v_g(q) = c$.

5.1.4 Puissance d'une onde progressive

Nous avons vu que la puissance transmise en un point était donnée par $P = -\kappa \partial_x u \partial_t u$. Pour une onde progressive harmonique de la forme

$$u(x, t) = A \cos(\omega t - qx), \quad (5.13)$$

la puissance transmise vaut

$$P(x, t) = \kappa \omega q A^2 \sin(\omega t - qx)^2. \quad (5.14)$$

En faisant une moyenne temporelle sur une période, on trouve la puissance transmise

$$\bar{P}(x) = \frac{\kappa \omega q A^2}{2}. \quad (5.15)$$

On remarque que la puissance est positive. Elle serait négative pour une onde se propageant vers les $x < 0$ et indique donc naturellement le sens de propagation.

5.1.5 Ondes progressives en milieu non-dispersif

Nous avons vu qu'un paquet d'onde avançait sans se déformer dans un milieu non-dispersif. Cela peut se montrer directement à partir de l'équation des ondes (Éq. (4.64)).

On peut réécrire l'équation des ondes

$$0 = (\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2) u(x, t) = (\partial_t - c \partial_x)(\partial_t + c \partial_x) u(x, t). \quad (5.16)$$

On peut montrer que la solution peut s'écrire comme la somme $u = u_+ + u_-$, où

$$(\partial_t - c \partial_x) u_+(x, t) = 0, \quad (5.17)$$

$$(\partial_t + c \partial_x) u_-(x, t) = 0. \quad (5.18)$$

Ce sont des équations de transport, respectivement à la vitesse c et à la vitesse $-c$, et leurs solutions sont

$$u_+(x, t) = f_+(x - ct), \quad (5.19)$$

$$u_-(x, t) = f_-(x + ct), \quad (5.20)$$

où $f_+(x)$ et $f_-(x)$ sont deux fonctions quelconques. Cela montre que quelle que soit la forme du paquet d'onde, il peut se propager sans se déformer dans les deux directions. Ces deux solutions sont des *ondes progressives*. Dans les milieux dispersifs, les seules ondes qui se propagent sans se déformer sont les *ondes progressives harmoniques*.

Solution avec condition initiale. Regardons comment obtenir la solution à tout temps pour une condition initiale donnée, et en particulier comment identifier le terme qui se déplace « vers la droite » et celui qui se déplace « vers la gauche ». Si on donne la valeur initiale du déplacement, $u(x,0) = u_0(x)$, on obtient l'équation

$$f_+(x) + f_-(x) = u_0(x), \quad (5.21)$$

qui n'est pas suffisante pour déterminer les fonctions $f_{\pm}$. C'est normal : l'équation des ondes est d'ordre 2 en temps, il faut donc une condition initiale sur le déplacement et une condition initiale sur la vitesse, $\partial_t u(x,0) = \dot{u}_0(x)$. Cela donne une nouvelle équation :

$$-cf'_+(x) + cf'_-(x) = \dot{u}_0(x). \quad (5.22)$$

On peut intégrer cette équation en introduisant une primitive $\dot{U}_0(x)$ de $\dot{u}_0(x)$:

$$f_-(x) - f_+(x) = \frac{\dot{U}_0(x)}{c}. \quad (5.23)$$

En la combinant avec la première équation, on obtient

$$f_{\pm}(x) = \frac{1}{2} \left[u_0(x) \mp \frac{\dot{U}_0(x)}{c} \right]. \quad (5.24)$$

On pourrait avoir l'impression que, la primitive étant définie à une constante près, plusieurs solutions sont possibles ; cependant, il est clairement équivalent d'ajouter une constante à f_+ ou f_- . Cela apparaît clairement quand on écrit la solution complète :

$$u(x,t) = f_+(x-ct) + f_-(x+ct) \quad (5.25)$$

$$= \frac{u_0(x-ct) + u_0(x+ct)}{2} + \frac{\dot{U}_0(x+ct) - \dot{U}_0(x-ct)}{2c} \quad (5.26)$$

$$= \frac{u_0(x-ct) + u_0(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \dot{u}_0(x') dx'. \quad (5.27)$$

On voit ici apparaître une propriété importante de l'équation des ondes : la vitesse de propagation finie de l'« information ». En effet, la solution en x au temps t ne dépend que des conditions initiales dans l'intervalle $[x-ct, x+ct]$.

5.2 Forçage d'un milieu semi-infini

Après avoir étudié la propagation des ondes en milieu infini, regardons ce qui se passe au bord d'un milieu semi-infini, puis à l'interface entre deux milieux semi-infinis.

Considérons un milieu semi-infini ($x > 0$) et supposons qu'on impose le déplacement en $x = 0$, $u(0,t) = A \cos(\omega t)$. Si on cherche la solution sous la forme d'une onde progressive de vitesse positive, celle-ci est

$$u(x,t) = A \cos(\omega t - q_{\omega} x), \quad (5.28)$$

où q_{ω} est le nombre d'onde relié à la fréquence ω par la relation de dispersion. Pour un milieu non dispersif, on peut écrire simplement la réponse à une excitation quelconque $u(0,t) = a(t)$:

$$u(x,t) = a\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (5.29)$$

Une difficulté peut apparaître si la fréquence ω n'est pas accessible dans la relation de dispersion. Ce cas est plus difficile à traiter et nous nous contenterons d'illustrer ce qu'il peut se passer sur

l'exemple de la chaîne avec liaisons au support, dans la limite continue (Sec. 4.3.3). La relation de dispersion est

$$\omega_q^2 = c^2 q^2 + \nu_0^2, \quad (5.30)$$

où nous avons noté $\nu'_0 = \nu_0$. La fréquence ω ne correspond à un nombre d'onde q que pour $\omega \geq \nu_0$. Cependant, si on reprend l'équation continue,

$$\partial_t^2 u(x, t) = c^2 \partial_x^2 u(x, t) - \nu_0^2 u(x, t), \quad (5.31)$$

on voit que l'on peut aussi chercher des solutions exponentielles, de la forme

$$u(x, t) = A \cos(\omega t) \exp(-bx). \quad (5.32)$$

On obtient

$$\omega^2 = -c^2 b^2 + \nu_0^2, \quad (5.33)$$

qui admet une solution pour b pour $0 \leq \omega \leq \nu_0$:

$$b = \frac{\sqrt{\nu_0^2 - \omega^2}}{c}. \quad (5.34)$$

La solution (5.32) représente une *onde évanescence*, qui ne se propage pas dans le milieu mais décroît sur une longueur caractéristique b^{-1} . Cette longueur est minimale quand la fréquence d'excitation tend vers 0 ($b^{-1} \rightarrow c\sqrt{m/k'}$) et tend vers l'infini quand la fréquence d'excitation tend vers ν_0 . Dans cet exemple, nous avons donc trouvé la réponse à une excitation de fréquence quelconque.

Si on revient aux chaînes d'oscillateur sans et avec liaison au support, ce n'est pas si simple : dans des cas il n'y a de solution évanescence ou progressive pour des fréquences d'excitation supérieures à $\sqrt{4\nu_0^2 + \nu_0'^2}$. Pour la chaîne avec liaison au support, des solutions évanescence apparaissent pour des fréquences inférieures à ν'_0 , mais des fréquences proches de 0 peuvent ne pas avoir de solution exponentielle ou oscillante.

5.3 Réflexion et transmission à une interface

Après avoir vu comment et dans quelles conditions on pouvait induire la propagation d'une onde progressive harmonique dans un milieu semi-infini en imposant un déplacement au bord, voyons ce qu'il se passe quand une telle onde rencontre une interface. Considérons d'abord le cas où la pulsation ω de l'onde est compatible avec une onde progressive harmonique dans le second milieu, et nous verrons ensuite ce qui arrive quand elle induit une onde évanescence.

Le milieu 1 occupe le demi-espace $x < 0$ et le milieu 2 le demi-espace $x \geq 0$. L'onde incidente arrive du milieu 1 et on l'écrit

$$u_i(x, t) = A_i \cos(\omega t - q_1 x) \quad (5.35)$$

pour $x < 0$.

5.3.1 Transmission d'une onde progressive

On considère ici que l'onde incidente donne naissance à une onde transmise $u_t(x, t) = A_t \cos(\omega t - q_2 x)$ définie pour $x > 0$ et à une onde réfléchie $u_r(x, t) = A_r \cos(\omega t + q_1 x)$ pour $x < 0$. La relation de dispersion du milieu j relie la pulsation ω au nombre d'onde q_j .

Nous avons obtenu les conditions de continuité dans la section 4.3.6. La première est que le déplacement doit être continu à l'interface :

$$u(0^-, t) = u(0^+, t), \quad (5.36)$$

$$u_i(0, t) + u_r(0, t) = u_t(0, t), \quad (5.37)$$

$$A_i + A_r = A_t. \quad (5.38)$$

La deuxième condition fait intervenir les « raideurs » $\kappa_j = \ell k_j$ des milieux 1 et 2 :

$$\kappa_1 \partial_x u(0^-, t) = \kappa_2 \partial_x u(0^+, t), \quad (5.39)$$

$$\kappa_1 q_1 (A_i - A_r) = \kappa_2 q_2 A_t. \quad (5.40)$$

Les équations (5.38, 5.40) forment un système de deux équations à deux inconnues pour les amplitudes des ondes réfléchie et transmise. On obtient

$$A_r = \frac{\kappa_1 q_1 - \kappa_2 q_2}{\kappa_1 q_1 + \kappa_2 q_2} A_i, \quad (5.41)$$

$$A_t = \frac{2\kappa_1 q_1}{\kappa_1 q_1 + \kappa_2 q_2} A_i. \quad (5.42)$$

On retrouve naturellement $A_t = A_i$ et $A_r = 0$ si les milieux sont identiques.

Bilan de puissance. La puissance des ondes incidente, réfléchie est transmise, moyennée sur une période, est :

$$\bar{P}_i = \frac{\omega}{2} \kappa_1 q_1 A_i^2, \quad (5.43)$$

$$\bar{P}_r = -\frac{\omega}{2} \kappa_1 q_1 A_r^2 = -\frac{\omega}{2} \kappa_1 q_1 \left(\frac{\kappa_1 q_1 - \kappa_2 q_2}{\kappa_1 q_1 + \kappa_2 q_2} \right)^2 A_i^2, \quad (5.44)$$

$$\bar{P}_t = \frac{\omega}{2} \kappa_2 q_2 A_t^2 = \frac{\omega}{2} \kappa_1 q_1 \frac{4\kappa_1 q_1 \kappa_2 q_2}{(\kappa_1 q_1 + \kappa_2 q_2)^2} A_i^2. \quad (5.45)$$

On voit alors que

$$\bar{P}_i = \bar{P}_t - \bar{P}_r : \quad (5.46)$$

la puissance incidente est la somme de la puissance transmise et de la puissance réfléchie. Le signe négatif pour l'onde réfléchie vient du fait que cette onde se propage vers les $x < 0$.

Milieux non-dispersifs, adaptation d'impédance. Regardons maintenant le cas où les deux milieux sont non-dispersifs et caractérisés par leur raideur κ_j , leur masse volumique ρ_j . La relation de dispersion dans le milieu j est donnée par $\omega = c_j q_j$, avec $c_j = \sqrt{\kappa_j / \rho_j}$. Les quantités qui apparaissent dans les amplitudes transmises et réfléchie sont $\kappa_j q_j = \kappa_j \omega / c_j = \omega \sqrt{\kappa_j \rho_j}$. On peut alors réécrire les équations (5.41, 5.42) :

$$A_r = \frac{\sqrt{\kappa_1 \rho_1} - \sqrt{\kappa_2 \rho_2}}{\sqrt{\kappa_1 \rho_1} + \sqrt{\kappa_2 \rho_2}} A_i, \quad (5.47)$$

$$A_t = \frac{2\sqrt{\kappa_1 \rho_1}}{\sqrt{\kappa_1 \rho_1} + \sqrt{\kappa_2 \rho_2}} A_i. \quad (5.48)$$

Dans les cas où le milieu 2 est infiniment lourd ($\rho_2 \rightarrow \infty$) ou infiniment rigide ($\kappa_2 \rightarrow \infty$), la réflexion est totale : $A_r = -1$, $A_t = 0$. Au contraire, pour que la transmission soit bonne ($A_r = 0$, $A_t = 1$), il faut que $\kappa_1 \rho_1 = \kappa_2 \rho_2$. En particulier, il n'est pas nécessaire que les milieux soient identiques, il suffit que la combinaison $\kappa \rho$ soit la même dans les deux milieux. Quand la transmission est bonne, on dit qu'il y a une bonne *adaptation d'impédance*. C'est une question d'importance dans les circuits électriques ou en optique.

5.3.2 Génération d'une onde évanescente

Regardons maintenant ce qu'il se passe quand la pulsation ω correspond à une onde évanescente de taux de décroissance b_2 dans le milieu 2. Cette fois, il est nécessaire de prendre une forme plus générale des ondes réfléchi et transmise, pour une raison qui sera claire plus bas :

$$u_r(x,t) = A_r \cos(\omega t + q_1 x) + B_r \sin(\omega t + q_1 x), \quad (5.49)$$

$$u_t(x,t) = [A_t \cos(\omega t) + B_t \sin(\omega t)] \exp(-b_2 x). \quad (5.50)$$

La condition de continuité du déplacement donne

$$(A_i + A_r) \cos(\omega t) + B_r \sin(\omega t) = A_t \cos(\omega t) + B_t \sin(\omega t), \quad (5.51)$$

d'où l'on déduit

$$A_i + A_r = A_t, \quad (5.52)$$

$$B_r = B_t. \quad (5.53)$$

La condition de continuité de $\kappa \partial_x u$ s'écrit

$$\kappa_1 q_1 (A_i - A_r) \sin(\omega t) + \kappa_1 q_1 B_r \cos(\omega t) = -\kappa_2 b_2 A_t \cos(\omega t) - \kappa_2 b_2 B_t \sin(\omega t), \quad (5.54)$$

et donc

$$\kappa_1 q_1 (A_i - A_r) = -\kappa_2 b_2 B_t, \quad (5.55)$$

$$\kappa_1 q_1 B_r = -\kappa_2 b_2 A_t. \quad (5.56)$$

En combinant les équations (5.52, 5.53, 5.55, 5.56), on arrive à

$$A_r = \frac{(\kappa_1 q_1)^2 - (\kappa_2 b_2)^2}{(\kappa_1 q_1)^2 + (\kappa_2 b_2)^2} A_i, \quad (5.57)$$

$$B_r = B_t = -\frac{2\kappa_1 q_1 \kappa_2 b_2}{(\kappa_1 q_1)^2 + (\kappa_2 b_2)^2}, \quad (5.58)$$

$$A_t = \frac{2(\kappa_1 q_1)^2}{(\kappa_1 q_1)^2 + (\kappa_2 b_2)^2}. \quad (5.59)$$

Bilan de puissance. La puissance moyenne de l'onde incidente est toujours donnée par l'équation (5.43)

$$\bar{P}_i = \frac{\omega}{2} \kappa_1 q_1 A_i^2. \quad (5.60)$$

Nous devons recalculer la puissance de l'onde réfléchi car elle contient un terme en $\cos(\omega t)$ et un terme en $\sin(\omega t)$:

$$P_r(x,t) = -\kappa_1 \partial_x u_r(x,t) \partial_t u_r(x,t) \quad (5.61)$$

$$= -\kappa_1 q_1 \omega [-A_r \sin(\omega t + q_1 x) + B_r \cos(\omega t + q_1 x)]^2 \quad (5.62)$$

$$= -\kappa_1 q_1 \omega [A_r^2 \sin^2(\omega t + q_1 x) + B_r^2 \cos^2(\omega t + q_1 x) - 2A_r B_r \sin(2[\omega t + q_1 x])] \quad (5.63)$$

En prenant la moyenne sur une période, le terme croisé $A_r B_r$ s'annule et

$$\bar{P}_r = -\frac{\omega \kappa_1 q_1}{2} (A_r^2 + B_r^2) \quad (5.64)$$

$$= -\frac{\omega \kappa_1 q_1}{2} A_i^2 \quad (5.65)$$

$$= -\bar{P}_i. \quad (5.66)$$

C'est à dire que toute la puissance incidente est réfléchiée, ce qui est cohérent avec le fait que l'onde transmise est évanescence et ne transmet donc aucune puissance.

Pour confirmer que l'onde transmise ne transmet pas de puissance, calculons la puissance qu'elle transmet :

$$P_t(x,t) = -\kappa_1 \partial_x u_t(x,t) \partial_t u_t(x,t) \quad (5.67)$$

$$= \kappa_2 q_2 \omega [A_t \cos(\omega t) + B_t \sin(\omega t)] [-A_t \sin(\omega t) + B_t \cos(\omega t)] \exp(-2b_2 x) \quad (5.68)$$

$$= \kappa_2 q_2 \omega \left(A_t B_t [\cos(\omega t)^2 - \sin(\omega t)^2] + \frac{B_t^2 - A_t^2}{2} \sin(2\omega t) \right) \exp(-2b_2 x). \quad (5.69)$$

En prenant la moyenne sur une période, on trouve bien

$$\bar{P}_t = 0. \quad (5.70)$$

Chapitre 6

Vibrations des cordes, membranes, et solides

6.1 Vibrations d'une corde

6.1.1 Vibrations transverses d'une chaîne masses-ressorts

Nous avons vu que la relation de dispersion des déplacements *longitudinaux* d'une chaîne masses-ressorts était donnée par

$$\omega_q^2 = 2\nu_0^2 [1 - \cos(\ell q)] \underset{\ell q \ll 1}{\simeq} c^2 q^2, \quad (6.1)$$

avec $c = \nu_0 \ell = \ell \sqrt{k/m} = \sqrt{\kappa/\rho}$. Dans la limite continue $\ell q \ll 1$, cette relation de dispersion correspond à l'équation des ondes.

Nous avons montré en section 4.2.2 que les déplacements *transverses*, dans la limite des petits déplacements, obéissaient à la même équation du mouvement à condition de remplacer la raideur k par la raideur effective $k_t = k(\ell - \ell_0)/\ell$, où ℓ_0 est la longueur à vide des ressorts. La quantité $T = k(\ell - \ell_0)$ est la tension dans la chaîne. Dans la limite continue, les ondes transverses obéissent à l'équation des ondes avec la vitesse

$$c_t = \ell \sqrt{\frac{T}{\ell m}} = \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \quad (6.2)$$

La raideur de la chaîne $\kappa = k\ell$ et sa tension T sont des quantités indépendantes ; on peut donc choisir indépendamment les propriétés des ondes longitudinales et des ondes transverses. En particulier, on peut prendre la limite d'une chaîne inextensible, $\kappa \rightarrow \infty$, mais avec une tension T finie. Dans ce cas, les déformations longitudinales ont une raideur infinie et ne peuvent pas être excitées par des forces finies ; seules les déformations transverses sont présentes. Cette limite correspond à celle de la corde tendue avec une tension T . Les déplacements transverses satisfont l'équation des ondes à la vitesse c_t :

$$\partial_t^2 u(x, t) = c_t^2 \partial_x^2 u(x, t). \quad (6.3)$$

Tout ce qui a été vu aux chapitres précédents sur les modes propres d'une chaîne et sur les ondes stationnaires et progressives qui s'y propagent s'applique directement à la corde.

6.1.2 Bilan des forces sur le milieu continu

Nous avons obtenu l'équation du mouvement de la corde en prenant la limite continue d'une chaîne masse-ressorts soumise à une tension. Il est aussi utile de l'obtenir directement à partir du modèle

continu, car c'est une approche que nous pourrions utiliser pour d'autres systèmes ensuite.

Considérons donc une corde de *masse linéique* (masse par unité de longueur) ρ et soumise à une tension t . Pour obtenir l'équation du mouvement de la corde, appliquons le principe fondamental de la dynamique à l'élément de corde compris entre les abscisses x et $x + \delta x$. La masse de cet élément est $\rho \delta x$, et son accélération est $\partial_t^2 u(x, t) \vec{u}_y$ à l'ordre δx^0 . Il faut donc calculer les forces auxquelles il est soumis à l'ordre δx .

On néglige la gravité. La tension de la corde s'exerce selon le vecteur tangent à la corde, qui fait un angle $\theta(x, t)$ avec l'horizontale. La force de la tension exercée en x par la « gauche » de la corde s'écrit

$$\vec{F}_T(x, t) = -T[\cos(\theta(x, t))\vec{u}_x + \sin(\theta(x, t))\vec{u}_y]. \quad (6.4)$$

La force exercée en $x + \delta x$ a la même expression, à l'exception du signe négatif. La force totale de la tension est donc

$$\vec{F} = T([\cos(\theta(x + \delta x, t)) - \cos(\theta(x, t))]\vec{u}_x + [\sin(\theta(x + \delta x, t)) - \sin(\theta(x, t))]\vec{u}_y). \quad (6.5)$$

En faisant un développement de Taylor de l'angle, $\theta(x + \delta x, t) \simeq \theta(x, t) + \delta x \partial_x \theta(x, t)$, et des fonctions sinusoïdales, on obtient

$$\vec{F} \simeq \delta x T \partial_x \theta(x, t) [-\sin(\theta(x, t))\vec{u}_x + \cos(\theta(x, t))\vec{u}_y]. \quad (6.6)$$

Il faut maintenant relier l'angle $\theta(x, t)$ au déplacement vertical $u(x, t)$ et calculer la force, à l'ordre δx . Par définition,

$$\tan(\theta(x, t)) = \frac{\delta u}{\delta x} = \partial_x u(x, t). \quad (6.7)$$

Dans la limite des petits déplacements, on a donc $|\partial_x u| \ll 1$, $|\theta(x, t)| \ll 1$ et

$$\partial_x u(x, t) \simeq \theta(x, t). \quad (6.8)$$

Dans l'expression (6.6) pour la force, l'hypothèse $|\theta(x, t)| \ll 1$ permet d'écrire $\sin(\theta(x, t)) \simeq 0$ et $\cos(\theta(x, t)) \simeq 1$. En utilisant aussi la relation entre $\theta(x, t)$ et $u(x, t)$, on obtient aussi

$$\vec{F} \simeq \delta x T \partial_x^2 u(x, t) \vec{u}_y. \quad (6.9)$$

Le PFD donne donc, après simplification,

$$\rho \partial_t^2 u(x, t) = T \partial_x^2 u(x, t). \quad (6.10)$$

On retrouve bien l'équation des ondes avec la vitesse $c_t = \sqrt{T/\rho}$.

6.2 Vibrations d'une membrane

Considérons maintenant une membrane de masse *surfactive* ρ soumise à une tension isotrope T et étudions ses déplacements transverses $u(\vec{r}, t)$ selon la direction z , où $\vec{r} = (x, y) \in \Omega$, avec Ω un domaine borné du plan. On suppose que la membrane est attachée au bord, qui est plat, $\vec{u}(\vec{r}, t) = 0 \forall \vec{r} \in \partial\Omega$, où $\partial\Omega$ désigne le bord du domaine Ω . Commençons par obtenir l'équation du mouvement de la membrane, puis nous déterminerons ses modes propres.

6.2.1 Bilan des forces

Notre calcul étend à deux dimensions le calcul fait pour la corde. Considérons l'élément de membranes compris entre les coordonnées x et $x + \delta x$, et y et $y + \delta y$. Sa masse est $\rho \delta x \delta y$ et son accélération $\partial_t^2 u(x, y, t) \vec{u}_z$.

La force exercée par la tension sur les bords situés en x et $x + \delta x$ est donnée par l'équation (6.9) :

$$\vec{F}_x \simeq \delta x \delta y T \partial_x^2 u(x, y, t) \vec{u}_z. \quad (6.11)$$

Nous avons seulement multiplié le résultat précédent par la largeur des bords, δy . Le même argument donne la force exercée par la tension sur les bords situés en y et $y + \delta y$, qui ont une largeur δx :

$$\vec{F}_y \simeq \delta x \delta y T \partial_y^2 u(x, y, t) \vec{u}_z. \quad (6.12)$$

La force totale est donc

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y \simeq \delta x \delta y T \Delta u(x, y, t) \vec{u}_z, \quad (6.13)$$

où apparaît le laplacien du déplacement, $\Delta u(x, y, t) = \partial_x^2 u(x, y, t) + \partial_y^2 u(x, y, t) = \nabla^2 u(x, y, t)$.

En appliquant le PFD, on obtient l'équation du mouvement,

$$\partial_t^2 u(\vec{r}, t) = c_t^2 \Delta u(\vec{r}, t). \quad (6.14)$$

C'est l'équation des ondes en dimension 2 avec la même vitesse $c_t = \sqrt{T/\rho}$.

Notons que, bien que l'expression de la vitesse des ondes semble la même que pour la corde, les quantités impliquées ne sont pas exactement les mêmes. Pour la corde, la vitesse fait intervenir la masse *linéique*, qui n'a pas la même dimension que la masse *surfactive* de la membrane. De façon correspondante, la tension de la corde est une force, alors que la tension de la membrane est une force par unité de longueur.

6.2.2 Densité et courant d'énergie

Pour les vibrations d'une chaîne, on peut définir la densité d'énergie mécanique (Éq. (4.89)) et la puissance transmise entre deux parties de la chaîne (Éq. (4.82)), et montrer qu'elles obéissent à une équation de conservation. Ces relations s'appliquent directement à la corde tendue en remplaçant la raideur κ par la tension T . Généralisons ces quantités pour la membrane.

La densité surfacique d'énergie cinétique doit toujours s'écrire

$$e_c(\vec{r}, t) = \frac{\rho}{2} [\partial_t u(\vec{r}, t)]^2. \quad (6.15)$$

La densité d'énergie potentielle d'une corde est $e_p(x, t) = (T/2) [\partial_x u(x, t)]^2$; une généralisation naturelle est

$$e_p(\vec{r}, t) = \frac{T}{2} [\vec{\nabla} u(\vec{r}, t)]^2. \quad (6.16)$$

Notons que le gradient au carré peut se développer :

$$(\vec{\nabla} u)^2 = (\vec{\nabla} u) \cdot (\vec{\nabla} u) = (\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2. \quad (6.17)$$

Calculons maintenant l'évolution temporelle de l'énergie mécanique, en utilisant l'équation des ondes (6.14)

$$\partial_t e_m(\vec{r}, t) = \rho \partial_t u(\vec{r}, t) \partial_t^2 u(\vec{r}, t) + T \left[\vec{\nabla} u(\vec{r}, t) \right] \cdot \left[\vec{\nabla} \partial_t u(\vec{r}, t) \right] \quad (6.18)$$

$$= T \left(\partial_t u(\vec{r}, t) \nabla^2 u(\vec{r}, t) + \left[\vec{\nabla} u(\vec{r}, t) \right] \cdot \left[\vec{\nabla} \partial_t u(\vec{r}, t) \right] \right) \quad (6.19)$$

$$= T \vec{\nabla} \cdot \left[\partial_t u(\vec{r}, t) \vec{\nabla} u(\vec{r}, t) \right] \quad (6.20)$$

$$= -\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}(\vec{r}, t), \quad (6.21)$$

où nous avons défini le courant d'énergie

$$\vec{\Pi}(\vec{r}, t) = -T \partial_t u(\vec{r}, t) \vec{\nabla} u(\vec{r}, t). \quad (6.22)$$

Dimensionnellement, c'est une puissance par unité de longueur.

Le courant d'énergie (6.22) a la même forme que la puissance transmise dans une corde (Éq. (4.82)) ; la dérivée par rapport à x est remplacée par un gradient, et le courant d'énergie devient un vecteur. La direction de ce vecteur indique la direction de propagation de l'énergie.

Contrairement au cas de la chaîne, pour laquelle nous avons obtenu la puissance par un calcul direct, ici nous avons obtenu le courant d'énergie en calculant l'évolution de l'énergie mécanique et en l'écrivant comme la divergence d'une quantité vectorielle.

6.2.3 Modes propres

Comme nous avons identifié les modes propres d'une chaîne, nous pouvons chercher les modes propres de la membrane. Reprenons leur définition : nous avons défini en section 3.2 la matrice dynamique A , qui permet d'écrire l'équation du mouvement sous la forme $\ddot{Q} = -AQ$. Nous avons ensuite défini les modes propres comme les vecteurs propres de la matrice dynamique. Ici, le vecteur des degrés de liberté $Q(t)$ est remplacé par la fonction continue $u(\vec{r}, t)$. Avec cette correspondance l'équation des ondes (6.14) est de la forme $\ddot{Q} = -AQ$ avec

$$A = -c_t^2 \Delta. \quad (6.23)$$

Comme pour la chaîne masses-ressorts (Éq. (4.4)), la matrice dynamique est proportionnelle au laplacien ; ici, il s'agit du laplacien continu à deux dimensions.

Pour une membrane attachée au bord, chercher un vecteur propre $\psi(\vec{r})$ du laplacien associé à la valeur propre λ revient à résoudre

$$\Delta \psi(\vec{r}) = \lambda \psi(\vec{r}), \quad (6.24)$$

pour $\vec{r} \in \Omega$, et $\psi(\vec{r}) = 0$ pour $\vec{r} \in \partial\Omega$. Il n'existe pas de solution simple à cette équation dans le cas général.

Contentons-nous de déterminer les modes propres dans le cas simple d'un domaine rectangulaire : $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$. Cherchons les solutions avec la méthode de séparation des variables, c'est à dire en écrivant $\psi(x, y) = f(x)g(y)$. L'équation à satisfaire est alors

$$\lambda f(x)g(y) = \Delta f(x)g(y) \quad (6.25)$$

$$= (\partial_x^2 + \partial_y^2) f(x)g(y) \quad (6.26)$$

$$= f''(x)g(y) + f(x)g''(y). \quad (6.27)$$

En divisant cette équation par $f(x)g(y)$, on obtient

$$\frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{g''(y)}{g(y)} = \lambda. \quad (6.28)$$

On en déduit que $f''(x)/f(x)$ et $g''(y)/g(y)$ sont des constantes, que l'on appelle λ_x et λ_y , de sorte que les fonctions $f(x)$ et $g(y)$ doivent vérifier

$$f''(x) = \lambda_x f(x), \quad (6.29)$$

$$g''(y) = \lambda_y g(y). \quad (6.30)$$

De plus, les conditions au bord imposent $f(0) = f(L_x) = g(0) = g(L_y) = 0$. Ce sont les mêmes équations que pour la chaîne (Sec. 4.1.2), la solution est donc

$$f(x) = \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L_x}\right), \quad (6.31)$$

$$\lambda_x = -\left(\frac{n_x \pi}{L_x}\right)^2. \quad (6.32)$$

La solution est la même pour $g(y)$, et on en déduit que les modes propres sont

$$\psi(x,y) = \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L_y}\right), \quad (6.33)$$

$$\lambda = -\left(\frac{n_x \pi}{L_x}\right)^2 - \left(\frac{n_y \pi}{L_y}\right)^2. \quad (6.34)$$

Avec n_x et n_y des entiers strictement positifs. Finalement, les valeurs propres de la matrice dynamique sont

$$\omega_{n_x, n_y}^2 = c_t^2 \left[\left(\frac{n_x \pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y \pi}{L_y}\right)^2 \right]. \quad (6.35)$$

On peut calculer avec la même approche les modes propres dans le cas où Ω est un disque.

6.2.4 Ondes progressives

Nous avons montré que la chaîne admettait aussi des ondes progressives de la forme $u(x,t) = A \cos(\omega t - qx)$. Pour la membrane, le terme qx se généralise en $\vec{q} \cdot \vec{r}$, où $\vec{q}$ est le vecteur d'onde. Montrons que

$$u(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{q} \cdot \vec{r}) \quad (6.36)$$

est bien solution de l'équation des ondes (6.14).

D'une part,

$$\partial_t^2 u(\vec{r}, t) = -\omega^2 u(\vec{r}, t). \quad (6.37)$$

D'autre part, nous devons calculer le laplacien de $u(\vec{r}, t)$:

$$\Delta u(\vec{r}, t) = A \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \cos(\omega t - \vec{q} \cdot \vec{r}) \quad (6.38)$$

$$= A \vec{\nabla} \cdot \vec{q} \sin(\omega t - \vec{q} \cdot \vec{r}) \quad (6.39)$$

$$= -q^2 A \cos(\omega t - \vec{q} \cdot \vec{r}). \quad (6.40)$$

Le calcul peut aussi être fait avec les dérivées partielles, avec $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$. En injectant ces deux expressions dans l'équation des ondes, on trouve la relation de dispersion

$$\omega^2 = c_t^2 q^2. \quad (6.41)$$

Il est important de noter que $\vec{q}$ est un vecteur et que c'est sa norme au carré qui intervient dans la relation de dispersion.

À un instant donné, l'ensemble des points pour lesquels $u(\vec{r}, t)$ a une amplitude donnée sont tels que $\vec{q} \cdot \vec{r}$ est constante ; ce sont des droites si $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$ ou des plans si $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$. Pour cette raison, on dit que l'équation (6.36) représente une *onde plane*. Comme elle est aussi progressive et harmonique, c'est une *onde plane progressive harmonique*, parfois notée OPPH.

La vitesse de l'onde (6.36) peut être obtenue en réécrivant :

$$\omega t - \vec{q} \cdot \vec{r} = \vec{q} \cdot \left(\frac{\omega \vec{q}}{q^2} t - \vec{r} \right) = \vec{q} \cdot (\vec{v} t - \vec{r}), \quad (6.42)$$

où nous avons identifié la vitesse

$$\vec{v} = \frac{\omega \vec{q}}{q^2}. \quad (6.43)$$

En utilisant la relation de dispersion (6.41), on peut écrire

$$\vec{v} = c_t \frac{\vec{q}}{q}, \quad (6.44)$$

où $q = \|\vec{q}\|$. L'onde se propage donc à vitesse c_t dans la direction donnée par le vecteur unitaire $\vec{q}/q$.

Finalement, calculons le courant d'énergie pour cette onde :

$$\vec{\Pi}(\vec{r}, t) = -T \partial_t u(\vec{r}, t) \vec{\nabla} u(\vec{r}, t) \quad (6.45)$$

$$= T \omega \vec{q} \sin(\omega t - \vec{q} \cdot \vec{r})^2. \quad (6.46)$$

Sa moyenne sur une période est

$$\bar{\vec{\Pi}} = \frac{1}{2} T \omega \vec{q}. \quad (6.47)$$

Comme pour la chaîne, le courant d'énergie indique la direction de propagation.

6.3 Vibrations d'une poutre

Nous allons maintenant étudier les vibrations d'une poutre solide, un cylindre plein de longueur L dans la direction x et de section S . Nous nous restreignons aux petits déplacements qui ne dépendent que de x et du temps. Quand ces déplacements sont dans la direction de propagation x , on parle d'*ondes de compression*, et quand ils sont dans une direction transverse on parle d'*ondes de cisaillement*. Cette distinction rappelle la distinction entre les ondes longitudinale et transverse dans une chaîne masse-ressorts. Pour déterminer l'équation des ondes, il faut d'abord décrire la réponse du solide à une déformation, qui relève de la théorie de l'élasticité.

6.3.1 Modules de compression et de cisaillement

Chaîne masses-ressorts et module de compression. Reprenons au cas de la chaîne masses-ressorts. Quand on applique une tension T à la chaîne, les ressorts passent de leur longueur au repos ℓ_0 à la longueur $\ell = \ell_0 + T/k$. L'extension relative de la chaîne, ou simplement *extension*, $\varepsilon = (\ell - \ell_0)/\ell_0$,

dépend linéairement de la force appliquée T par $\varepsilon = T/(\ell_0 k) = T/\kappa$, où κ est ce que nous avons appelé la raideur de la chaîne. On arrive donc à l'expression

$$T = \kappa \varepsilon. \quad (6.48)$$

Si l'extension n'est pas uniforme dans la chaîne, la relation ci-dessus peut-être rendue locale. La tension T_j dans le ressort entre les atomes j et $j + 1$ est donnée par

$$T_j = k(u_{j+1} - u_j) \simeq k\ell \partial_x u(j\ell) = \kappa \partial_x u(j\ell), \quad (6.49)$$

où les déplacements sont selon la direction x . En comparant cette expression avec la précédente, on en déduit que

$$T(x) = \kappa \partial_x u(x) = \kappa \varepsilon(x). \quad (6.50)$$

La même relation existe dans la poutre, mais cette fois la force $F(x)$ transmise par une section est aussi proportionnelle à son aire S , ainsi on écrira

$$F(x) = SE\varepsilon(x), \quad (6.51)$$

où E est le *module d'Young*, ou *module de compression* du matériau, qui caractérise sa réponse à une compression ou une extension. La force s'exerce dans la direction x .

Il faut faire attention au signe : la force est celle exercée par la partie « droite » de la poutre sur la partie « gauche ».

Module de cisaillement. On peut définir de la même manière le module de cisaillement. Considérons des déplacements $v(x)$ dans une direction transverse. Le matériau est déformé si ces déplacements varient avec x ; et cette déformation est le *cisaillement*

$$\gamma(x) = \partial_x v(x). \quad (6.52)$$

En présence de cisaillement, deux sections voisines n'ont pas le même déplacement transverse et elles exercent donc entre elles une force dans la direction transverse, qui est proportionnelle à l'aire de la section et au cisaillement :

$$F_t(x) = SG\gamma(x), \quad (6.53)$$

où G est le *module de cisaillement* du matériau.

Extension et cisaillement peuvent coexister dans la chaîne, si bien que chaque section peut transmettre une force ayant des composantes longitudinale et transverse.

Notons que tout matériau linéaire isotrope est caractérisé entièrement par les deux modules élastiques E et G . D'autre part, le module de compression est toujours supérieur au module de cisaillement et même $E > 2G$.

6.3.2 Équations du mouvement

Nous pouvons maintenant établir les équations du mouvement en considérant l'élément de poutre situé entre les abscisses x et $x + \delta x$. Cet élément est de masse $\rho S \delta x$, où ρ est la masse volumique du solide. Considérons à la fois des déplacements longitudinaux et transverses, que l'on prend dans la direction y : le déplacement est $u(x,t)\vec{u}_x + v(x,t)\vec{u}_y$. L'accélération est donc $\partial_t^2 u(x,t)\vec{u}_x + \partial_t^2 v(x,t)\vec{u}_y$.

Faisons maintenant un bilan de forces. Les forces dues à l'extension et au cisaillement et qui s'exercent sur les sections en x et en $x + \delta x$ résultent en la force

$$\vec{F} = SE\epsilon(x + \delta x)\vec{u}_x + SG\gamma(x + \delta x)\vec{u}_y - SE\epsilon(x)\vec{u}_x - SG\gamma(x)\vec{u}_y \quad (6.54)$$

$$\simeq S\delta x [E\partial_x\epsilon(x)\vec{u}_x + G\partial_x\gamma(x)\vec{u}_y] \quad (6.55)$$

$$= S\delta x [E\partial_x^2 u(x)\vec{u}_x + G\partial_x^2 v(x)\vec{u}_y]. \quad (6.56)$$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique et en séparant les directions x et y , on obtient

$$\partial_t^2 u(x, t) = c_P^2 \partial_x^2 u(x, t), \quad (6.57)$$

$$\partial_t^2 v(x, t) = c_S^2 \partial_x^2 v(x, t). \quad (6.58)$$

Les déplacements transverses et longitudinaux suivent l'équation des ondes mais avec des vitesses différentes,

$$c_P = \sqrt{E/\rho}, \quad (6.59)$$

$$c_S = \sqrt{G/\rho}. \quad (6.60)$$

Comme $E > 2G$, les ondes P (les ondes de compression) sont plus rapides que les ondes S (les ondes de cisaillement).

Pour avoir un ordre de grandeur, l'acier a une masse volumique $\rho \simeq 8 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ et un module de compression $E \simeq 200 \text{ GPa}$, les ondes longitudinales s'y propagent donc à une vitesse $c_P \simeq 5 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}$.

Concluons par quelques remarques :

- Comme pour la corde tendue, tout ce qui a été dit sur les ondes stationnaires et progressives s'applique ici.
- On peut aussi essayer de décrire l'équation du mouvement pour un déplacement général $\vec{u}(x, y, z, t)$, mais c'est beaucoup plus difficile.
- Contrairement à la chaîne masses-ressorts, il n'est pas nécessaire d'appliquer une tension à la poutre pour avoir des ondes de cisaillement.

Chapitre 7

Ondes dans les fluides

7.1 Ondes sonores

7.1.1 Équations de base et hypothèse acoustique

Équations de base. L'état local d'un fluide est donné par sa pression $p(\vec{r}, t)$, sa température $T(\vec{r}, t)$, sa vitesse $\vec{v}(\vec{r}, t)$ et sa masse volumique $\rho(\vec{r}, t)$. Commençons par donner les équations de base qui régissent ces quantités avant d'introduire les hypothèses qui permettent d'obtenir l'équation de propagation des ondes sonores.

La première de ces équations est la conservation de la masse :

$$\partial_t \rho(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} \cdot [\rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t)]. \quad (7.1)$$

La seconde est l'équation du mouvement (qui est en fait une équation de conservation de la quantité de mouvement), qui est l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho(\vec{r}, t) \left[\partial_t \vec{v}(\vec{r}, t) + \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla} \vec{v}(\vec{r}, t) \right] = -\vec{\nabla} p(\vec{r}, t) + \eta \Delta \vec{v}(\vec{r}, t), \quad (7.2)$$

où η est la viscosité dynamique du fluide. Nous avons négligé la pesanteur.

La troisième est l'équation d'état du fluide, qui relie la pression, la densité et la température. L'équation d'état du gaz parfait est un exemple d'équation d'état, mais l'équation d'état ne s'écrit pas explicitement en général.

Hypothèse acoustique. L'hypothèse acoustique consiste à considérer que le fluide est parfait, qu'il n'est que faiblement perturbé et que ses perturbations sont réversibles. L'hypothèse de fluide parfait revient à négliger le terme de viscosité dans l'équation de Navier-Stokes (7.2), qui devient l'équation d'Euler.

L'hypothèse de faible perturbation revient à écrire $\rho(\vec{r}, t) = \rho_0 + \rho_1(\vec{r}, t)$, $p(\vec{r}, t) = p_0 + p_1(\vec{r}, t)$ et $\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}_1(\vec{r}, t)$, et à linéariser les équations par rapport à $\rho_1(\vec{r}, t)$, $p_1(\vec{r}, t)$ et $\vec{v}_1(\vec{r}, t)$. Avec ces hypothèses, les équations (7.1, 7.2) deviennent

$$\partial_t \rho_1(\vec{r}, t) = -\rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1(\vec{r}, t) \quad (7.3)$$

$$\rho_0 \partial_t \vec{v}_1(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} p_1(\vec{r}, t). \quad (7.4)$$

L'hypothèse de perturbations réversibles, couplée à l'hypothèse de faibles perturbations, permet de relier la variations de densité à la variation de pression via la compressibilité isentropique χ_S :

$$\chi_S = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_S \simeq \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho_1}{p_1}. \quad (7.5)$$

Ainsi, on a

$$\rho_1(\vec{r}, t) = \rho_0 \chi_S p_1(\vec{r}, t). \quad (7.6)$$

Les équations (7.3, 7.4, 7.6) définissent un système de 3 équations différentielles à 3 inconnues, dont nous allons partir pour obtenir l'équation des ondes sonores.

7.1.2 Équation des ondes sonores

Surpression. En prenant la divergence de l'équation d'Euler (7.4), puis en utilisant la conservation de la masse (7.3) et enfin l'équation d'état (7.6), on a

$$\Delta p_1(\vec{r}, t) = -\rho_0 \partial_t \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1(\vec{r}, t) \quad (7.7)$$

$$= \partial_t^2 \rho_1(\vec{r}, t) \quad (7.8)$$

$$= \rho_0 \chi_S \partial_t^2 p_1(\vec{r}, t). \quad (7.9)$$

Nous avons obtenu l'équation des ondes pour la surpression $p_1(\vec{r}, t)$:

$$\partial_t^2 p_1(\vec{r}, t) = c^2 \Delta p_1(\vec{r}, t), \quad (7.10)$$

où la vitesse est donnée par

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}}. \quad (7.11)$$

Le fluide n'est pas dispersif pour les ondes sonores.

Notons que la compressibilité joue ici le rôle de l'inverse de la tension dans une membrane, du module de compression dans un solide, ou de la raideur dans une chaîne.

Vitesse. Pour obtenir une équation pour le champ de vitesse $\vec{v}_1(\vec{r}, t)$, commençons par prendre le rotationnel de l'équation d'Euler (7.4) :

$$\rho_0 \partial_t \vec{\nabla} \times \vec{v}_1(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} p_1(\vec{r}, t) = \vec{0}, \quad (7.12)$$

ce qui signifie que le rotationnel de $\vec{v}_1(\vec{r}, t)$ est constant. Comme on s'intéresse à des phénomènes ondulatoires où les quantités varient dans le temps autour d'une valeur moyenne nulle, il est naturel de supposer que $\vec{\nabla} \times \vec{v}_1(\vec{r}, t) = \vec{0}$. Dans ce cas, l'écoulement $\vec{v}_1(\vec{r}, t)$ dérive d'un potentiel $\phi(\vec{r}, t)$: $\vec{v}_1(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \phi(\vec{r}, t)$. En injectant cette forme dans l'équation d'Euler, on trouve

$$\rho_0 \vec{\nabla} \partial_t \phi(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} p_1(\vec{r}, t), \quad (7.13)$$

ce qui implique que $\partial_t \phi(\vec{r}, t) = -p_1(\vec{r})/\rho_0 + f(t)$, où $f(t)$ est une fonction ne dépendant que du temps. Comme le potentiel $\phi(\vec{r}, t)$ n'est défini qu'à une constante spatiale près, on peut éliminer cette fonction et écrire $\partial_t \phi(\vec{r}, t) = -p_1(\vec{r}, t)/\rho_0$. En dérivant l'équation de la surpression (7.10) par rapport au temps, on en déduit que $\phi(\vec{r}, t)$ satisfait la même équation. Finalement, en prenant le gradient de cette équation, on arrive à la même équation pour le champ de vitesse :

$$\partial_t^2 v_1(\vec{r}, t) = c^2 \Delta v_1(\vec{r}, t). \quad (7.14)$$

Absence d'ondes transverses. L'équation des ondes (7.14) pour le champ de vitesse semble indiquer que les ondes longitudinales et transverses obéissent à la même équation et peuvent se propager à la même vitesse. Pour voir que ce n'est pas le cas, prenons l'exemple du champ de déplacement « transverse » $\vec{v}(\vec{r}, t) = v_y(x, t)\vec{u}_y$, et calculons son rotationnel :

$$\vec{\nabla} \times \vec{v}(\vec{r}, t) = (\vec{u}_x \partial_x + \vec{u}_y \partial_y + \vec{u}_z \partial_z) \times [v_y(x, t)\vec{u}_y] = \partial_x v_y(x, t)\vec{u}_z \neq 0. \quad (7.15)$$

Ce champ de vitesse ne convient donc pas. Il est aussi immédiat de voir que sa divergence est nulle, et donc qu'il ne génère pas de variation de densité ni de pression, qui sont nécessaires à la propagation des ondes.

Au contraire, le champ de vitesse « longitudinal » $\vec{v}(\vec{r}, t)$ est de rotationnel nul et de divergence non-nulle, et il est un champ selon lequel des ondes peuvent se propager.

Ce comportement des fluides contraste avec celui des solides, dans lesquels des ondes de compression et de cisaillement peuvent se propager, mais avec des vitesses différentes. Dans les fluides, seules les ondes de compression (ou, simplement, de pression), peuvent se propager.

Ordres de grandeur. Donnons simplement l'exemple d'un gaz, l'air, et d'un liquide, l'eau. Pour l'eau sous conditions « normales » de température et de pression, $\rho_0 \simeq 1 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ et $\chi_S \simeq 5 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$, et la vitesse du son vaut donc $c_{\text{eau}} \simeq 1,4 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}$.

Sous conditions normales de température et de pression, la densité de l'air vaut $\rho_0 \simeq 1,2 \text{ kg m}^{-3}$. La compressibilité de l'air peut s'obtenir en supposant que c'est un gaz parfait, ce qui implique que la compressibilité isentropique est reliée à la compressibilité isentropique est reliée à la compressibilité isotherme χ_T par l'indice adiabatique γ :

$$\chi_S = \frac{\chi_T}{\gamma}. \quad (7.16)$$

L'indice adiabatique dépend du type de gaz et il est de $\gamma = 7/5$ pour un gaz diatomique, ce qui est en pratique le cas de l'air, qui est composé à 99 % de diazote et de dioxygène. Pour un gaz parfait, la compressibilité isotherme est donnée par la loi des gaz parfaits :

$$\chi_T = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T = \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial p} \right)_T = \left(\frac{\partial \ln p}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{p}. \quad (7.17)$$

Ainsi, pour l'air

$$\chi_S = \frac{1}{\gamma p} \simeq 7 \times 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}. \quad (7.18)$$

La vitesse du son dans l'air est donc

$$c_{\text{air}} \simeq 340 \text{ m s}^{-1}. \quad (7.19)$$

7.1.3 Courant d'énergie et puissance sonore

Définissons le courant d'énergie $\vec{\Pi}(\vec{r}, t)$, puis nous montrerons comment il est lié à l'« énergie mécanique » du fluide. Commençons par un cas unidimensionnel : plaçons-nous dans un tuyau de section S , orienté selon x , et considérons les champs de vitesse et de surpression $v_x(x, t)\vec{u}_x$ et $p_1(x, t)$. La force de pression exercée par le fluide de la partie gauche sur le fluide de la partie droite est $Sp(x, t)\vec{u}_x$, et la puissance de cette force est $P(x, t) = Sp(x, t)v_x(x, t)$. Le courant d'énergie est donc $\Pi(x, t) = P(x, t)/S = p_1(x, t)v_x(x, t)$, et il est dirigé selon x ; on peut donc l'écrire $\Pi = p_1(x, t)v_x(x, t)\vec{u}_x$. Cette expression se généralise immédiatement à un champ de vitesse quelconque :

$$\vec{\Pi}(\vec{r}, t) = p_1(\vec{r}, t)\vec{v}(\vec{r}, t). \quad (7.20)$$

Calculons maintenant la divergence du courant d'énergie

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \cdot [p_1(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t)] \quad (7.21)$$

$$= \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla} p_1(\vec{r}, t) + p_1(\vec{r}, t) \vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{r}, t) \quad (7.22)$$

$$= -\rho_0 \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \partial_t \vec{v}(\vec{r}, t) - \frac{p_1(\vec{r}, t)}{\rho_0} \partial_t \rho_1(r, t). \quad (7.23)$$

où nous avons utilisé l'équation d'Euler (7.4) et l'équation de conservation (7.3). En utilisant la compressibilité, on peut écrire

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}(\vec{r}, t) = -\rho_0 \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \partial_t \vec{v}(\vec{r}, t) - \chi_S p_1(\vec{r}, t) \partial_t p_1(r, t) \quad (7.24)$$

$$= -\partial_t \left[\frac{\rho_0}{2} v(\vec{r}, t)^2 + \frac{\chi_S}{2} p_1(\vec{r}, t)^2 \right], \quad (7.25)$$

où nous identifions les densités d'énergie cinétique et potentielle :

$$e_c(\vec{r}, t) = \frac{\rho_0}{2} v(\vec{r}, t)^2, \quad (7.26)$$

$$e_p(\vec{r}, t) = \frac{\chi_S}{2} p_1(\vec{r}, t)^2. \quad (7.27)$$

L'énergie cinétique a l'expression attendue. L'énergie potentielle correspond à la compression ou à la dilatation du fluide.

Pour se ramener à des formes connues, introduisons le champ de déplacement $\vec{u}(\vec{r}, t)$ tel que $\partial_t \vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r}, t)$. L'équation de conservation s'écrit alors $\partial_t \rho_1(\vec{r}, t) = -\rho_0 \partial_t \vec{\nabla} \cdot \vec{u}(\vec{r}, t)$, d'où l'on déduit que $\rho_1(\vec{r}, t) = -\rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{u}(\vec{r}, t)$. La surpression est donc $p_1(\vec{r}, t) = \rho_1(\vec{r}, t) / (\rho_0 \chi_S) = -\chi_S^{-1} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}(\vec{r}, t)$. On peut donc réécrire les énergies cinétique et potentielle avec le déplacement :

$$e_c(\vec{r}, t) = \frac{\rho_0}{2} [\partial_t \vec{u}(\vec{r}, t)]^2, \quad (7.28)$$

$$e_p(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\chi_S} [\vec{\nabla} \cdot \vec{u}(\vec{r}, t)]^2. \quad (7.29)$$

Ces expressions sont proches de celles obtenues pour les membranes (Éqs. (6.15, 6.16)). Comme nous l'avons vu pour la vitesse, la compressibilité joue ici le rôle de l'inverse de raideur du milieu.

7.1.4 Ondes acoustiques

Discutons rapidement des propriétés des ondes planes progressives harmoniques solutions de l'équation des ondes (7.10). Considérons l'onde de surpression :

$$p_1(\vec{r}, t) = p_{10} \cos(\omega t - qx). \quad (7.30)$$

Comme nous l'avons vu pour les membranes, nous pourrions remplacer le terme qx par le terme plus général $\vec{q} \cdot \vec{r}$.

Déterminons le champ de vitesse correspondant. En utilisant l'équation d'Euler, on a

$$\rho_0 \partial_t \vec{v}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} p_1(\vec{r}, t) = p_{10} q \sin(\omega t - qx) \vec{u}_x \quad (7.31)$$

Le champ de vitesse est donc

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = p_{10} \sqrt{\frac{\chi_S}{\rho_0}} \cos(\omega t - qx) \vec{u}_x, \quad (7.32)$$

où nous avons utilisé $q = \omega/c = \omega\sqrt{\rho_0\chi_S}$.

Calculons le courant d'énergie associé à cette onde :

$$\vec{\Pi}(\vec{r}, t) = p_1(\vec{r}, t)\vec{v}(\vec{r}, t) = p_{10}^2\sqrt{\frac{\chi_S}{\rho_0}}\cos(\omega t - qx)^2\vec{u}_x. \quad (7.33)$$

La moyenne sur une période donne

$$\bar{\vec{\Pi}}(\vec{r}, t) = \frac{p_{10}^2}{2}\sqrt{\frac{\chi_S}{\rho_0}}\vec{u}_x. \quad (7.34)$$

Comme pour la membrane, on trouve un courant d'énergie orienté dans le sens de propagation de l'onde et proportionnel au carré de l'amplitude de la surpression. Ici, le courant d'énergie s'exprime en W m^{-2} , c'est la *puissance acoustique* de l'onde, ou *intensité acoustique*.

Niveau d'intensité acoustique et hypothèse acoustique. Le niveau d'intensité acoustique est souvent mesuré en décibels, notés dB. Cette unité correspond à la quantité

$$I = 10 \log \frac{\Pi}{\Pi_{\text{réf}}}, \quad (7.35)$$

où $\Pi_{\text{réf}} = 1 \times 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$ est une intensité acoustique de référence.

Calculons maintenant la variation de pression correspondante au niveau d'intensité acoustique de travaux, 100 dB ; une conversation correspond à 60 dB. On a donc

$$100 = 10 \log \left(\frac{p_{10}^2}{\Pi_{\text{réf}}} \sqrt{\frac{\chi_S}{\rho_0}} \right). \quad (7.36)$$

On en déduit

$$p_{10} = \left(10^{10} \Pi_{\text{réf}} \sqrt{\frac{\rho_0}{\chi_S}} \right)^{1/2} \simeq 2 \text{ Pa} \ll p_0 \simeq 1 \times 10^5 \text{ Pa}. \quad (7.37)$$

Cela montre que la variation de pression associée à une onde sonore de haute intensité est très faible par rapport à la pression atmosphérique, ce qui supporte l'hypothèse acoustique. La vitesse de l'air au passage de cette onde est

$$v_0 = p_{10} \sqrt{\frac{\chi_S}{\rho_0}} \simeq 5 \text{ mm s}^{-1}, \quad (7.38)$$

ce qui est aussi très faible.

Effet de la viscosité de l'air. Nous avons négligé l'effet de la viscosité du fluide, et nous pouvons maintenant évaluer sa validité. Comparons par exemple le terme de viscosité, $\eta \Delta \vec{v}$, au terme d'inertie, $\rho_0 \partial_t \vec{v}$. Pour une onde plane progressive harmonique,

$$\frac{\|\eta \Delta \vec{v}\|}{\|\rho_0 \partial_t \vec{v}\|} = \frac{\eta q^2}{\rho_0 \omega} = \frac{\eta \omega}{\rho_0 c^2}. \quad (7.39)$$

La viscosité est donc négligeable si

$$\omega \ll \frac{\rho_0 c^2}{\eta} \simeq 7 \text{ GHz}, \quad (7.40)$$

pour l'air, avec $\eta \simeq 1,9 \times 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$.

7.1.5 Interface, impédance acoustique

Étudions maintenant comment les ondes sonores se comportent à l'interface entre deux milieux différents, comme nous l'avons fait pour les chaînes en section 5.3. Il suffit pour cela de spécifier les conditions aux limites entre les deux milieux : d'une part, le déplacement, et donc la vitesse, doivent être continus, et d'autre part la pression doit être continue.

Appliquons ces lois à la transmission et la réflexion d'une onde acoustique $v_i(x,t) = v_{i0} \cos(\omega t - q_1 x)$, incidente sur l'interface séparant les milieux 1 et 2 en $x = 0$. Les ondes transmises et réfléchies s'écrivent $v_t(x,t) = v_{t0} \cos(\omega t - q_2 x)$ et $v_r(x,t) = v_{r0} \cos(\omega t + q_1 x)$.

En utilisant l'équation d'Euler comme nous l'avons fait dans la section précédente, nous pouvons écrire les pressions correspondantes, avec $p_{i0} = Z_1 v_{i0}$, $p_{t0} = Z_2 v_{t0}$ et $p_{r0} = -Z_1 v_{r0}$, où nous avons introduit l'*impédance acoustique* du milieu j ,

$$Z_j = \rho_j c_j = \sqrt{\frac{\rho_j}{\chi_{S,j}}}. \quad (7.41)$$

Le signe négatif pour l'onde réfléchie vient de sa direction de propagation. Les continuités de la vitesse et de la pression s'écrivent alors

$$v_{i0} + v_{r0} = v_{t0}, \quad (7.42)$$

$$Z_1 (v_{i0} + v_{r0}) = Z_2 v_{t0}. \quad (7.43)$$

La solution est

$$v_{t0} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} v_{i0}, \quad (7.44)$$

$$v_{r0} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} v_{i0}. \quad (7.45)$$

Comme pour la chaîne, un unique paramètre par milieu permet de déterminer les amplitudes des ondes transmises et réfléchies ; il s'agit ici de l'impédance acoustique Z_j . Quand les impédances sont adaptées, c'est à dire quand $Z_1 = Z_2$, l'onde est intégralement transmise.

7.2 Ondes de surface

7.2.1 Énoncé du problème et équations de base

Énoncé du problème. Dans cette section, nous étudions les ondes à la surface d'un liquide. Ce sont les ondes qui sont créées par l'arrivée d'une goutte de pluie dans une flaque, le déplacement d'un bateau sur la mer ou le vent.

Nous considérons un fluide parfait incompressible compris entre l'air et un fond fixe. La surface se trouve à $z = 0$ au repos et le fond se trouve à $z = -H$. La variation de hauteur de la surface est notée $\zeta(x,y,t)$ et on la suppose faible devant toute autre longueur. On cherche une équation d'évolution pour $\zeta(x,y,t)$. Nous allons restreindre notre étude au cas d'une onde plane progressive harmonique

$$\zeta(x,t) = \zeta_0 \cos(\omega t - qx), \quad (7.46)$$

pour laquelle nous allons déterminer la relation de dispersion.

Équations de base. Pour décrire le mouvement de la surface du fluide, il faut décrire l'écoulement complet. On introduit pour cela la vitesse $\vec{v}(\vec{r}, t)$ et la pression $p(\vec{r}, t)$. L'écoulement est soumis à la gravité et à la capillarité.

La première équation est l'équation de conservation de la masse, qui s'écrit pour un fluide incompressible,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{r}, t) = 0. \quad (7.47)$$

La deuxième équation est l'équation d'Euler :

$$\rho \partial_t \vec{v}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} p(\vec{r}, t) - \rho g \vec{u}_z. \quad (7.48)$$

Il faut aussi donner les conditions au bord. Le fluide ne peut pas rentrer dans le fond, donc

$$v_z(x, y, z = -H, t) = 0. \quad (7.49)$$

À la surface, la vitesse du fluide correspond à la vitesse de la surface :

$$v_z(x, y, z = 0, t) = \partial_t \zeta(x, y, t). \quad (7.50)$$

Nous avons utilisé le fait que la variation de hauteur ζ soit faible pour écrire $v_z(x, y, \zeta, t) \simeq v_z(x, y, 0, t)$. Plus généralement, nous limitons nos calculs à l'ordre le plus bas en ζ .

La condition au bord pour la pression est donnée par

$$p(x, y, z = \zeta(x, y, t), t) = p_0 - \gamma \Delta \zeta(x, y, t). \quad (7.51)$$

C'est la *loi de Laplace* : la tension de surface γ induit un saut de pression entre l'air p_0 et le liquide si la surface est courbée. On peut faire un développement de Taylor pour exprimer la pression en $z = 0$:

$$p(x, y, 0, t) = p_0 - \gamma \Delta \zeta(x, y, t) - \zeta(x, y, t) \partial_z p(x, y, 0, t), \quad (7.52)$$

où il suffit d'exprimer $\partial_z p$ à l'ordre 0 en ζ . On peut le faire avec l'équation d'Euler (7.48),

$$\partial_z p(x, y, 0, t) = -\rho g - \rho \partial_t v_z(x, y, 0, t) \simeq -\rho g, \quad (7.53)$$

car la vitesse est du même ordre que ζ . On retiendra donc pour la condition au bord,

$$p(x, y, 0, t) = p_0 + \rho g \zeta(x, y, t) - \gamma \Delta \zeta(x, y, t). \quad (7.54)$$

7.2.2 Onde plane progressive harmonique

Cherchons maintenant à résoudre les équations (7.47, 7.48, 7.49, 7.50, 7.54) pour une onde plane progressive harmonique en surface (7.46). On cherche notamment une solution indépendante de y .

On a la vitesse en surface,

$$v_z(x, 0, t) = \partial_t \zeta(x, t) = -\zeta_0 \omega \sin(\omega t - qx). \quad (7.55)$$

Supposons que le champ de vitesse vertical soit à toute hauteur

$$v_z(x, z, t) = -\zeta_0 \omega f(z) \sin(\omega t - qx). \quad (7.56)$$

La fonction $f(z)$ doit vérifier les conditions au bord $f(0) = 1$ et $f(-H) = 0$. Utilisons l'incompressibilité (7.47) :

$$\partial_x v_x(x, z, t) = -\partial_z v_z(x, z, t) = \zeta_0 \omega f'(z) \sin(\omega t - qx). \quad (7.57)$$

On peut intégrer cette équation en

$$v_x(x, z, t) = \zeta_0 \frac{\omega}{q} f'(z) \cos(\omega t - qx) \quad (7.58)$$

Projetons maintenant l'équation d'Euler sur x et z :

$$\rho \partial_t v_x(x, z, t) = -\partial_x p(x, z, t), \quad (7.59)$$

$$\rho \partial_t v_z(x, z, t) = -\partial_z p(x, z, t) - \rho g. \quad (7.60)$$

On peut en déduire une relation entre les deux composantes de la vitesse :

$$\partial_x \partial_z p(x, z, t) = -\rho \partial_t \partial_z v_x(x, z, t) = -\rho \partial_t \partial_x v_z(x, z, t), \quad (7.61)$$

d'où l'on déduit

$$\partial_x v_z(x, z, t) = \partial_z v_x(x, z, t). \quad (7.62)$$

En insérant les expressions (7.56, 7.58), on obtient

$$f''(z) = q^2 f(z). \quad (7.63)$$

La solution à cette équation qui satisfait les conditions au bord est

$$f(z) = \frac{\text{sh}(q(H + z))}{\text{sh}(qH)}. \quad (7.64)$$

La condition au bord (7.54) pour la pression s'écrit

$$p(x, 0, t) = p_0 + \zeta_0(\rho g + \gamma q^2) \cos(\omega t - qx). \quad (7.65)$$

En l'insérant dans la projection de l'équation d'Euler selon x (Éq. (7.59)), on obtient

$$\rho \zeta_0 \frac{\omega^2}{q} f'(0) \sin(\omega t - qx) = \zeta_0 q(\rho g + \gamma q^2) \sin(\omega t - qx). \quad (7.66)$$

En simplifiant et en utilisant que $f'(0) = q/\text{th}(qH)$, on obtient la relation de dispersion

$$\omega^2 = gq \left(1 + \ell_c^2 q^2\right) \text{th}(qH). \quad (7.67)$$

Nous avons introduit la longueur capillaire

$$\ell_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}, \quad (7.68)$$

qui compare les effets de la capillarité et de la gravité. La capillarité domine aux petites échelles et la gravité domine aux grandes échelles. Pour l'eau, $\gamma \simeq 7 \times 10^{-2} \text{ J m}^{-2}$ et $\ell_c \simeq 2,7 \text{ mm}$.

Contrairement à ce dont nous avons l'habitude, la relation de dispersion (7.67) a une forme complexe. En supposant que la profondeur soit grande devant la longueur capillaire, $H \gg \ell_c$, on peut distinguer trois régimes :

- Pour $q \ll H^{-1}$, c'est à dire pour des longueurs d'onde plus grandes que la profondeur, $\text{th}(qH) \simeq qH$ et $\ell_c^2 q^2 \ll 1$. Alors la relation de dispersion devient

$$\omega^2 \simeq gHq^2; \quad (7.69)$$

elle correspond à une équation des ondes avec la vitesse $c = \sqrt{gH}$.

- Pour $H^{-1} \ll q \ll \ell_c^{-1}$, $\text{th}(qH) \simeq 1$ et $\ell_c q \ll 1$, la relation de dispersion devient alors :

$$\omega^2 \simeq gq. \quad (7.70)$$

Cette relation de dispersion ne dépend plus que de la gravité et on parle alors d'*onde de gravité* ; elle est notamment insensible à la profondeur H . Le milieu devient dispersif, les vitesses de phase et de groupe sont $v_\varphi = \omega/q = \sqrt{g/q}$ et $v_g = \sqrt{g/q}/2$.

- Pour $q \gg \ell_c^{-1}$, la relation de dispersion devient

$$\omega^2 \simeq g\ell_c^2 q^3 = \frac{\gamma}{\rho} q^3, \quad (7.71)$$

elle est toujours dispersive, les vitesses de phase et de groupe sont $v_\varphi = \sqrt{\gamma q/\rho}$ et $v_g = 3v_\varphi/2$. Elle ne dépend cette fois que de la densité du liquide et de la tension de surface, et on parle d'*onde capillaire*.

La transition entre onde de gravité et onde capillaire intervient pour $q = q^* = \ell_c^{-1}$, c'est à dire pour une longueur d'onde

$$\lambda^* = \frac{2\pi}{q^*} = 2\pi\ell_c \simeq 17 \text{ cm}. \quad (7.72)$$

On voit que les vitesses de phase et de groupe atteignent un minimum autour de cette longueur.